

MIHAIL ATANASIU



# MECANICA TEHNICĂ

I

EDITURA DIDACTICA ȘI PEDAGOGICA BUCUREȘTI – 1963

Ing. ATANASIU M.

# MECANICA TEHNICĂ

*Vol. I*

MANUAL PENTRU ȘCOLILE TEHNICE DE MAÎȘTRI  
ANUL I ȘI II

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ  
BUCUREȘTI - 1963





Manualul a fost elaborat pe baza programei școlare  
aprobată de Ministerul Învățământului

Referenți :

ing. VOINEA R.

ing. TOMESCU GH.

ing. ROGAI E.

ing. ENACHE ȘTEFĂNIȚĂ



## PREFAȚĂ

După cum se arată în raportul prezentat de tovarășul Gheorghe Gheorghiu-Dej la cel de-al III-lea Congres al Partidului Muncitoresc Român, „Obiectivul principal al planului economic pe anii 1960—1965 este dezvoltarea bazei tehnice-materiale a socialismului, încheierea procesului de făurire a relațiilor de producție socialiste în întreaga economie, în vederea desăvârșirii construcției socialismului.”

În raportul prezentat la sesiunea extraordinară a Marii Adunări Naționale de către tovarășul Gheorghe Gheorghiu-Dej din 27 aprilie 1962 se arată că „Obiectivul stabilit la Congresul al III-lea P.M.R. în domeniul transformării socialiste a agriculturii a fost realizat cu aproape patru ani înainte de termen” și astfel „În Republica Populară Română socialismul a învins definitiv la orașe și sate.”

Pentru continua întărire a economiei noastre socialiste se impune cunoașterea metodelor tehnicii noi, a procedeelelor de lucru încintate, însușirea legilor de bază privind funcționarea diferitelor mașini și agregate, folosite în industrie și agricultură. De aceea, după cum se arată în același raport, „O problemă de însemnătate capitală pentru economie și cultură, care se află în permanență în atenția partidului și statului nostru, este pregătirea de cadre calificate de toate gradele.”

La alcătuirea prezentei lucrări ne-am străduit ca ea să corespundă cât se poate de bine acestui scop; pentru aceasta, principalele obiective pe care le-am avut în vedere au fost claritatea și metodică expunerii, precum și orientarea ei pe linia învățaturii marxist-leniniste; prin preocuparea permanentă de a lega de practică noțiunile și teoremele mecanicii, de a prezenta aplicații cu date concrete privind mașinile realizate de industria țării noastre în anii regimului democrat-popular, de a arăta grija Partidului Muncitoresc Român pentru mecanizare, automatizare, dezvoltarea tehnicii noi, precum și pentru ocrotirea sănătății și a capacității de muncă a celor ce muncesc, considerăm că vom contribui la pregătirea unor maiștri corespunzători industriei noastre socialiste.



# Partea I

## GENERALITĂȚI

### Capitolul I

#### **NOTIUNILE FUNDAMENTALE, OBIECTUL, PĂRȚILE MECANICII**

##### **1. Obiectul mecanicii**

Mecanica este una dintre cele mai vechi științe, care s-a format pe baza experienței dobândite de oameni în ceea ce privește mișcarea corpurilor, cu ocazia folosirii forțelor naturii în scopul satisfacerii nevoilor de a construi, de a realiza mașini.

Obiectul mecanicii îl constituie studiul mișcării și al forțelor care apar în diferitele mecanisme întâlnite în tehnică.

Se consideră o mașină folosită în tehnică, spre exemplu un automobil, și se analizează modul în care mișcarea și forța sînt transmise dintr-o parte în alta a mașinii; astfel, presiunea amestecului de gaze din cilindri acționînd asupra pistoanelor le pune în mișcare; acestea, la rîndul lor, acționînd asupra bielei motoare o pun în mișcare, transmițînd, prin intermediul acesteia forțele și mișcarea arborelui motor, apoi cutiei de viteze și roților automobilului. Din acest exemplu se observă că atît forța cît și mișcarea sînt transmise în același timp, dintr-o parte în cealaltă a mașinii; transmiterea mișcării și a forței nu pot fi separate una de cealaltă.

Există și cazuri în care forțele care se transmit între diferite corpuri care acționează unul asupra celuilalt nu pun în mișcare corpurile respective; asemenea cazuri se întîlnesc, spre exemplu





la construcții: forțele care iau naștere între diferitele corpuri care alcătuiesc o construcție (cărămizi, grinzi etc.) nu pun în mișcare corpurile respective. Acest caz, în care transmiterea de forță se face în timp ce corpurile respective se află în repaus, formează un capitol aparte al mecanicii; el are multe aplicații, în special în domeniul construcțiilor și al instalațiilor întâlnite în industria chimică, industria petrolului etc.

Din aceste exemple rezultă că elementele fundamentale care formează obiectul de studiu al mecanicii sînt *forțele* transmise între diferitele organe ale unei mașini sau între diferite părți care alcătuiesc o construcție, împreună cu *mișcările* pe care le capătă organele respective sub acțiunea forțelor transmise.

Mecanica se află la baza multor discipline tehnice, metodele ei fiind utilizate direct la rezolvarea problemelor ridicate de aceste discipline.

## 2. Materia și mișcarea; mișcarea mecanică a materiei

Lumea încojurătoare, întreg universul, este format din materie aflată în mișcare, fără început și fără sfîrșit.

Materia constituie realitatea obiectivă; ea există independent de voința noastră.

Materia nu poate fi nici creată, nici distrusă; orice „distrugere” a materiei este numai aparentă; în realitate, această „distrugere” nu este altceva decît transformarea materiei dintr-o formă în alta, legea conservării materiei fiind o lege absolută, eternă a naturii.

Materia este infinită și veșnică, avînd un număr infinit de mare de proprietăți. Rolul oamenilor de știință și al tehnicienilor constă în a scoate la iveală mereu noi proprietăți ale materiei și a le pune în slujba dezvoltării societății, a fericirii și bunăstării oamenilor.

Cea mai importantă însușire a materiei este aceea că *ea se mișcă în spațiu și în timp*. Mișcarea constituie forma de existență a materiei, inseparabilă de aceasta. La fel ca și materia, mișcarea este veșnică, fără început și fără sfîrșit; ea nu poate fi nici creată, nici distrusă.

Mișcarea materiei poate fi observată în lumea înconjurătoare: mișcarea obiectelor pe pămînt, mișcarea planetelor în





jurul Soarelui, mișcarea moleculelor și a atomilor din interiorul corpurilor, transformările fizice și reacțiile chimice, transformările biologice (nașterea și dispariția speciilor de ființe vii), apariția orînduirilor noi și dispariția orînduirilor vechi în societate, toate acestea sînt forme ale mișcării.

Din exemplele de mai sus rezultă că în general prin mișcare se înțelege *orice fel de schimbare, transformare sau dezvoltare de natură fizică, chimică, fiziologică, socială.*

Dintre toate aceste forme ale mișcării, cea mai simplă este *mișcarea mecanică.* Ea constă din *deplasarea corpurilor în spațiu unele față de altele.* Astfel de mișcări se întîlnesc zilnic în jurul nostru : mișcarea unui obiect care cade pe pămînt de la o înălțime oarecare, mișcarea unui vehicul față de corpurile înconjurătoare.

Cu studiul sistematic al mișcării mecanice se ocupă *mecanica teoretică.* Ea este una dintre științele naturii cu aplicații foarte largi în tehnică ; astfel, multe discipline, de o deosebită însemnătate pentru activitatea curentă a unui tehnician, ca teoria mecanismelor, rezistența materialelor, organe de mașini, au la bază rezultatele mecanicii teoretice.

### 3. Spațiul și timpul

Mișcarea materiei se desfășoară în spațiu și în timp. Fie că este vorba despre mișcarea mecanică a obiectelor, a planetelor sau de reacțiile chimice, transformările biologice sau sociale, ele se desfășoară întotdeauna într-un *loc* din spațiu bine determinat și durează un anumit *timp* care de asemenea poate fi determinat.

Cu ajutorul noțiunilor de spațiu și de timp se pot caracteriza întinderea geometrică, dimensiunile corpurilor materiale, precum și durata fenomenelor care au loc în natură.

Se poate spune deci că *spațiul este acea formă obiectivă de existență a materiei care caracterizează dimensiunile obiectelor materiale.*

Spațiul întîlnit în mecanică este cel cunoscut din geometrie, avînd trei dimensiuni : lungime, lățime și înălțime, și o întindere nemărginită în toate cele trei direcții ale acestor dimensiuni.

De asemenea, vom spune că *timpul este acea formă obiectivă de existență a materiei care caracterizează durata unui proces*



*oarecare, precum și faptul dacă două procese se desfășoară o dată (sînt simultane) sau unul după altul (sînt succesive).*

Despre noțiunile de spațiu și timp ne dăm seama pe baza practicii că există independent de voința noastră în realitatea care ne înconjură: trăim în spațiu și timp, în jurul nostru se află diferite corpuri la care ajungem mișcându-ne, evenimentele care se petrec în natură și societate au o durată, un eveniment oarecare se petrece fie înaintea altuia, fie după un altul, fie o dată (simultan) cu alt eveniment.

Spațiul și timpul sînt percepute în legătură unul cu altul; astfel, de exemplu, mergînd dintr-un loc într-altul trece un anumit timp.

#### 4. Masa

Noțiunea de masă a apărut în mecanică odată cu cîntărirea corpurilor. Ea s-a dezvoltat apoi paralel cu studiul mișcării planetelor în jurul Soarelui.

Despre masa corpurilor ne dăm seama că există în mod real prin aceea că încercînd să punem în mișcare corpurile din jurul nostru ele opun o rezistență, pe care o cunoaștem din fizică sub denumirea de *inerție*. Această rezistență, împreună cu proprietatea corpurilor de a avea greutate, constituie manifestarea directă a masei ca una dintre proprietățile de bază ale materiei.

În cele ce urmează vom folosi noțiunea de masă atît în statică cît și în dinamică, pentru a caracteriza proprietățile de *greutate* și *inerție* ale materiei.

#### 5. Forța

Să presupunem că avem un corp așezat pe o masă, pe care dorim să-l punem în mișcare în planul mesei (fig. 1.1). Pentru aceasta, vom agăța într-un punct al acestui corp o sfoară de care vom trage. Vom putea astfel să deplasăm corpul în planul mesei în orice direcție dorim. De aici putem trage concluzia că acțiunea exercitată de noi asupra corpului, acțiune pe care o vom denumi *forță*, este aplicată într-un punct al corpului, acționînd de-a lungul unei drepte numită *suportul* sau *linia de acțiune* a forței respective, avînd un anumit *sens* de-a lungul acestei drepte.



Aceste trei elemente (punct de aplicație, direcție și sens) nu sînt suficiente pentru a caracteriza o forță. Într-adevăr, să introducem între punctul de prindere al sforii de pe corp și extremitatea sforii un arc elicoidal; dacă tragem acum din nou de sfoară, vom observa că păstrînd același punct de aplicație, direcție și sens al forței pe care o aplicăm corpului nostru, vom putea trage de sfoară astfel încît arcul elicoidal să se lungească mai mult sau mai puțin. Vom observa cu această ocazie că atunci cînd arcul elicoidal se lungește mai mult, efortul muscular depus de noi pentru acționarea sforii este mai mare; vom spune că, în acest caz, forța aplicată este mai mare decît în cazul în care arcul se lungește mai puțin.

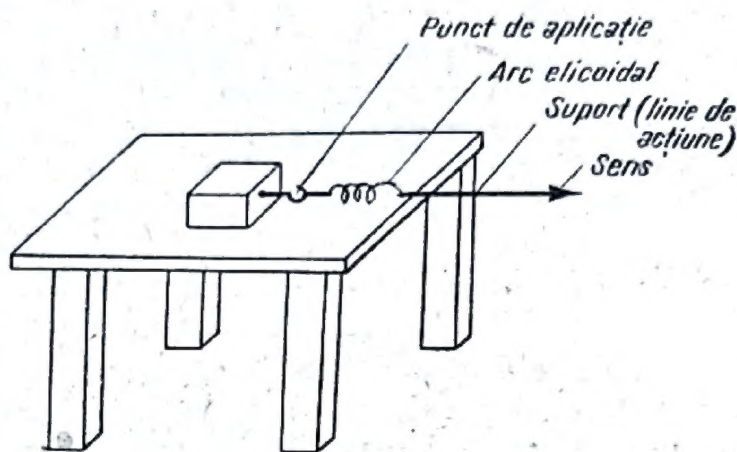


Fig. 1.1.

Rezultă de aici că un alt element important în caracterizarea forței îl constituie *intensitatea sau modulul său*.

Din cele de mai sus tragem concluzia că forța este o mărime vectorială (adică o mărime care se reprezintă printr-un vector), care măsoară cel mai simplu mod în care corpurile acționează unul asupra altuia, și anume *modul mecanic de acțiune reciprocă*; acest mod se manifestă prin două efecte: *schimbarea poziției corpurilor unul față de celălalt și deformarea corpurilor*.

Astfel, acțiunea de atracție a Pămîntului exercitată asupra corpurilor de la suprafața sa poartă numele de greutate; alte asemenea interacțiuni mai sînt: acțiunea apei dintr-un rezervor asupra pereților rezervorului, a corpurilor așezate pe o masă asupra mesei respective etc.

Deformațiile pe care le capătă corpurile sub acțiunea forțelor ce le sînt aplicate pot fi în anumite cazuri destul de mari și atunci ele vor fi observate cu ușurință; așa este cazul spre exemplu la întinderea unui șnur de cauciuc, la întinderea sau comprimarea unui arc, la încovoierea unei bare metalice subțiri. În alte cazuri, aceste deformații nu sînt perceptibile cu ochiul liber, ci numai cu ajutorul unor instrumente de măsură speciale; așa este cazul la întinderea unei bare de oțel de secțiune mare, la comprimarea unui bloc de oțel sau de beton etc.



În foarte multe cazuri întâlnite în practică, corpurile capătă sub acțiunea forțelor care le sînt aplicate deformații foarte mici, care pot fi neglijate ; din acest motiv, în mecanică, deformația corpurilor se neglijează, introducîndu-se noțiunea de *solid rigid* pentru corpurile la care forțele care sînt aplicate produc deformații neglijabile.

Noțiunea de forță a apărut în mecanică din necesitatea de a măsura într-un mod oarecare efortul muscular pe care-l depune omul pentru a se deplasa dintr-un loc într-altul, pentru a ridica o greutate etc. Ea apărut deci legată de mișcarea mecanică a corpurilor și de aceea a fost privită multă vreme ca o cauză a acestei mișcări. Această definiție a forței ca o „cauză a mișcării” este considerată astăzi ca fiind greșită, deoarece mișcarea nu are nevoie de nici o cauză pentru a se produce.

Odată cu noțiunea de forță, mai apare, după cum se va vedea din cele ce urmează, și o altă noțiune importantă, aceea de *cuplu de forțe*. El este format dintr-o pereche de forțe egale, paralele, de sensuri contrare, situate pe suporturi diferite.

Atît forțele cît și cuplurile nu se pot exercita decît de la un corp către alt corp ; ele reprezintă deci acțiunile reciproce sau *interacțiunile* a două corpuri.

Drept interacțiuni prin cupluri putem da ca exemplu interacțiunile rotorului și statorului unei mașini electrice ; fiecare din aceste corpuri aplică celuilalt un cuplu. Cuplul aplicat de stator rotorului îl pune pe acesta din urmă în mișcare, iar cuplul aplicat de rotor asupra statorului se transmite fundației motorului.

În tehnică, forțele și cuplurile pe care și le aplică unul altora corpurile din natură, piesele unui mecanism, organele de mașini sînt denumite cu un singur cuvînt *sarcini*.

Forțele și cuplurile care se transmit între două corpuri pot fi clasificate după două mari criterii, și anume :

— după poziția celor două corpuri care acționează unul asupra celuilalt, ele pot fi clasificate în : *sarcini transmise fără ca cele două corpuri să se afle în contact direct și sarcini transmise prin contactul direct al corpurilor*. Din prima categorie fac parte forțele de atracție pe care Pămîntul le exercită asupra corpurilor aflate la suprafața sa (greutatea) și forțele de atracție magnetică dintre două obiecte (un magnet și o bucată de fier), iar din cea de-a doua categorie fac parte forțele care iau naștere între un obiect așezat pe masă și masă, între cilindrul unui motor și gazele care ard în interiorul său, între roțile vehiculelor și sol ;



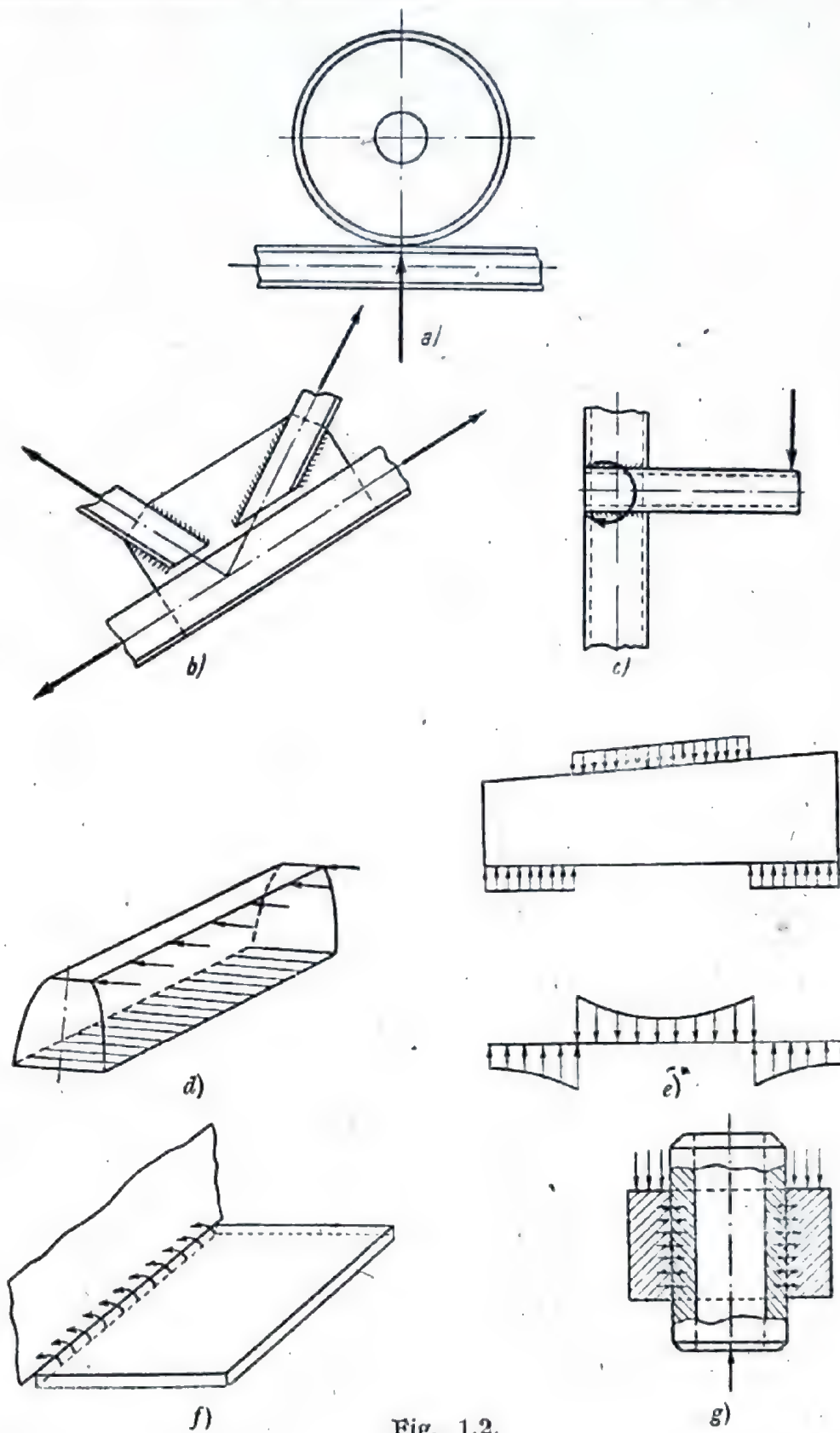


Fig. 1.2.



— după dimensiunile regiunii căreia îi sînt transmise sarcinile (atît cele de la distanță cît și cele transmise prin contact direct), ele pot fi clasificate în *sarcini concentrate* și *sarcini distribuite*. Vom spune că o sarcină (forță sau cuplu) este concentrată dacă dimensiunile regiunii corpului căruia îi este transmisă sînt atît de mici încît pot fi approximate printr-un punct; vom spune că o sarcină este distribuită dacă regiunea căreia îi este transmisă este o curbă, o suprafață sau un volum. Ca exemple de sarcini concentrate cităm forța transmisă de șină roții care merge pe ea (fig. 1.2, a) forțele transmise într-un nod al unei construcții metalice (fig. 1.2, b), cuplul transmis unei bare de către o altă bară sudată pe ea (fig. 1.2, c). Ca exemple de sarcini distribuite pe o curbă cităm forțele transmise între dinții roților unui angrenaj (fig. 1.2, d), forțele aplicate unei pene care îmbină doi tiranți cu manșon (fig. 1.2, e), cuplurile aplicate laturii unei plăci încastrate într-un zid (fig. 1.2, f); ca exemple de sarcini distribuite pe suprafață cităm forțele care iau naștere între două piese fretate (doi cilindri încălziți și introduși forțat unul în celălalt) (fig. 1.2, g). Ca exemplu de forțe distribuite pe volum putem considera forțele de greutate ale corpurilor; într-adevăr, în acest caz toate particulele corpului respectiv sînt atrase de Pămînt astfel încît forța de atracție se exercită asupra întregului volum al corpului.

## 6. Caracterul relativ al mișcării mecanice; repausul

Din experiența zilnică știm cu toții că deplasarea, schimbarea poziției unui corp în spațiu, nu poate fi observată decît în raport cu alte corpuri înconjurătoare.

Să presupunem că vagonul unui tren de călători se deplasează pe șină, de la o stație la alta, transportînd călători și bagaje. Să mai presupunem că șina de tren este un corp fix în spațiu.

Să raportăm acum mișcarea corpurilor din vagon pe de o parte la șina pe care se deplasează trenul, iar pe de altă parte la vagonul aflat în mișcare. Despre călătorii care se deplasează în vagon vom spune că se mișcă atît față de vagon, cît și față de șină; este ușor de văzut că aceste două mișcări sînt diferite.

Despre călătorii care stau nemișcați în vagon ca și despre bagaje vom spune că se află în repaus față de vagon, dar în mișcare față de șină.



Din exemplele de mai sus rezultă că întotdeauna când spunem despre un corp că „se mișcă” sau „se află în repaus” trebuie să precizăm imediat și *față de ce corp* este considerată mișcarea sau repausul respectiv.

Corpul sau corpurile la care raportăm mișcarea altor corpuri sînt denumite în mecanică *repere sau sisteme de referință*.

Dacă într-un interval oarecare de timp, un corp nu-și schimbă poziția față de sistemul de referință ales, vom spune că el se află în stare de repaus față de acel sistem de referință, în intervalul respectiv de timp.

Dacă sistemul de referință ales este fix, mișcarea și repausul corpurilor față de el vor fi denumite *absolute*; dacă sistemul de referință ales se află el însuși în mișcare, mișcarea și repausul față de el vor fi denumite *relative*.

În natură nu întîlnim repaus absolut deoarece nu există un sistem de referință absolut. Astfel, în exemplul dat vagonul se mișcă față de șină, șina se mișcă odată cu Pămînt în jurul axei sale și în jurul Soarelui, iar Soarele se mișcă și el o dată cu celelalte corpuri din Univers. De aceea, repausul este numei un fenomen relativ, în raport cu anumite sisteme de referință. În mecanică vom considera totuși că anumite sisteme de referință sînt: fixe; spre exemplu, în toate aplicațiile tehnice vom considera Pămîntul drept sistem de referință fix, deoarece mișcarea Pămîntului are o influență neglijabilă asupra organelor mașinilor.

## 7. Studiul echilibrului și mișcării corpurilor de care se ocupă mecanica

Pornind de la datele concrete ale realității înconjurătoare, mecanica a creat o serie de *reprezentări simplificate* ale corpurilor din natură. Acest proces ne este cunoscut și din alte discipline; astfel, avînd la bază realitatea înconjurătoare, geometria a creat reprezentările simplificate de punct, linie dreaptă și suprafață, care ușurează studiul formelor geometrice din natură.

a) **Punctul material.** De multe ori, în studiul mișcării și echilibrului corpurilor din natură, dimensiunile acestor corpuri nu joacă un rol important. Astfel, spre exemplu, fie că studiem echilibrul unei bile atîrnate de tavan, fie că studiem echilibrul unei lămpi atîrnate în aceleași condiții, rezultatele vor fi ace-



leăși; dimensiunile bilei sau ale lămpii nu vor apărea în rezultat. De asemenea vom putea studia mișcarea Pământului în jurul Soarelui neglijând dimensiunile Pământului în raport cu distanțele mari existente în Univers, considerînd Pământul ca un punct.

Pentru toate aceste situații, mecanica a creat noțiunea de *punct material*. *Punctul material este un punct geometric (corp fără nici o dimensiune) care are concentrată în el o cantitate de materie avînd o anumită masă.* Punctul material nu există deci în mod real în natură, el este o creația a mecanicii, o generalizare a tuturor corpurilor ale căror dimensiuni pot fi neglijate în raport cu cele ale corpurilor înconjurătoare; cu ajutorul noțiunii de punct material, putem reprezenta în calcule în *mod aproximativ* aceste corpuri.

**b) Corpul solid rigid.** După cum am arătat mai sus, în mecanică se înțelege prin *solid rigid* un corp a cărui formă și dimensiuni nu se schimbă oricît de mari ar fi sarcinile exterioare pe care i le-am aplica. Cu foarte mici excepții, toate corpurile cu studiul echilibrului și mișcării cărora se ocupă mecanica sînt considerate solide rigide. Trebuie să observăm de la început că asemenea corpuri nu există în natură; oricît de dur ar fi materialul din care este confecționat un corp, acesta se deformează atunci cînd i se aplică din exteriorul său una sau mai multe sarcini. Este adevărat că cu cît materialul din care este alcătuit corpul este mai dur cu atît deformațiile pe care le suferă corpul respectiv sînt mai mici, de cele mai multe ori imperceptibile cu ajutorul simțurilor noastre, dar totuși măsurabile cu ajutorul aparatelor de măsurat.

Noțiunea de solid rigid constituie pentru omul de știință și pentru tehnician numai o *aproximație a corpurilor materiale reale*, care există în natură, aproximație justificată tocmai de faptul că aceste deformații au în general valori mici. Atunci cînd aproximațiile rezultate în urma ipotezei rigidității corpului devin supărătoare, trebuie luate în considerație și deformațiile corpului respectiv sub acțiunea sarcinilor exterioare.

**c) Sistemul de corpuri solide rigide.** În natură și în special în tehnică, se întîlnesc mecanisme și mașini formate din corpuri solide rigide, care sînt montate și funcționează acționînd unul asupra celuilalt; ele poartă numele de *sisteme de corpuri solide rigide*.

În cele ce urmează, toate aceste trei reprezentări ale mecanicii: punct material, corp solid rigid și sistem de corpuri solide rigide vor fi denumite pe scurt *sisteme materiale*.



## 8. Bazele geometrice ale echilibrului și mișcării

a) **Mărimile geometrice care caracterizează poziția unui corp în spațiu.** Orice corp material ocupă la un moment dat un anumit loc sau o anumită poziție în spațiu, în raport cu un alt corp ales drept sistem de referință. Dacă această poziție este mereu aceeași, adică dacă ea nu se schimbă o dată cu trecerea timpului, spunem despre corpul respectiv că se află în *repaus*; dacă această poziție este variabilă, adică dacă ea se schimbă o dată cu trecerea timpului, spunem despre corpul respectiv că se află în *mișcare*. Orice corp material are — în general — posibilitatea de a ocupa una sau chiar mai multe poziții în spațiu, afară de cazul când el este obligat într-un mod oarecare să rămână solidar cu un alt corp. Toate aceste observații pe care le cunoaștem din experiența zilnică ne conduc în mod firesc la următoarea întrebare: *cum se poate preciza poziția unui anumit corp în spațiu sau, altfel zis, cu ajutorul căror mărimi se pot deosebi între ele diferitele poziții ocupate de un același corp în spațiu?*

Practica ne arată că mărimile cu ajutorul cărora putem determina în orice moment poziția unui anumit corp în spațiu față de un sistem de referință dat sînt de natură geometrică; mai exact ele sînt *distanțe și unghiuri*. Să luăm un exemplu: să presupunem că dorim să așezăm pe o masă orizontală un corp de formă paralelipipedică, astfel încît el să ocupe o anumită poziție pe această masă (fig. 1.3). Pentru a găsi care sînt mărimile necesare spre a indica poziția sa procedăm astfel: fixăm mai întîi unul dintre colțurile paralelipipedului (de exemplu vîrful  $A$ ); aceasta se face cu ajutorul a două numere  $x$  și  $y$  măsurate față de marginile  $Ox$  și  $Oy$  ale mesei, numite *coordonatele punctului  $A$* . Cu aceste două distanțe n-am precizat însă decît numai în parte poziția paralelipipedului nostru; într-adevăr, păstrînd fix vîrful  $A$  și rămînînd în contact cu una dintre fețele sale pe masă, paralelipipedul se poate roti în jurul muchiei  $AC$ , ocupînd astfel o infinitate de poziții în jurul acestei muchii.

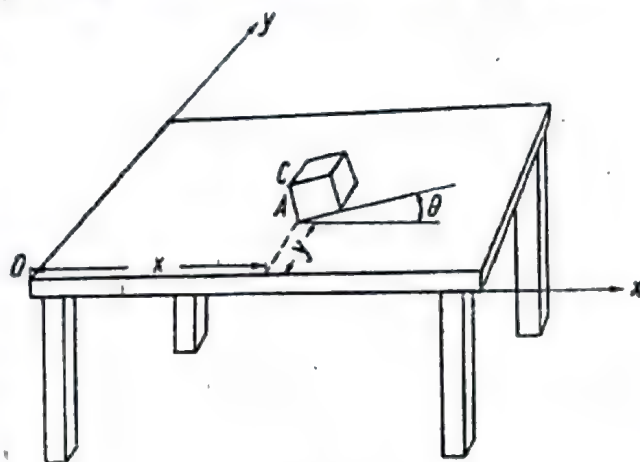


Fig. 1.3.



Mărimea care lipsește pentru a fixa poziția paralelipipedului este un unghi, și anume unghiul  $\theta$  format de una dintre muchiile sale aflate în contact cu masa și o dreaptă fixă, cum ar fi de exemplu dreapta paralelă cu una dintre laturile mesei, trecînd prin vîrfurile  $A$  al paralelipipedului. Am fixat astfel poziția corpului nostru cu ajutorul a trei mărimi geometrice: distanțele  $x$  și  $y$  și unghiul  $\theta$ . După cum se poate observa ușor, dacă se dau valorile mărimilor  $x$ ,  $y$  și  $\theta$  (unghiul  $\theta$  se măsoară în sens trigonometric) se obține o singură poziție a paralelipipedului nostru, și invers: dacă se dă poziția paralelipipedului, putem determina valorile mărimilor  $x$ ,  $y$  și  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ ). Aceasta înseamnă că am reușit să precizăm poziția unui corp cu ajutorul valorilor căpătate de anumite mărimi geometrice, care ne indică pozițiile ocupate de corpul respectiv în spațiu. Acest fapt prezintă o importanță deosebită pentru studiul atît al echilibrului cît și al mișcării corpurilor. Într-adevăr, cu ajutorul mărimilor geometrice care determină poziția unui corp putem caracteriza atît starea sa de repaus cît și starea sa de mișcare; *dacă toate mărimile care determină poziția corpului vor avea anumite valori constante, corpul respectiv se va afla în repaus; dacă cel puțin una dintre aceste mărimi va fi o funcție oarecare de timp, corpul se va afla în mișcare.* Caracterul și proprietățile acestor mișcări vor fi studiate în cadrul unui capitol special al mecanicii, *cinematica*.

b) **Mărimi geometrice independente și mărimi geometrice dependente.** Să considerăm acum un alt exemplu: fie o bară

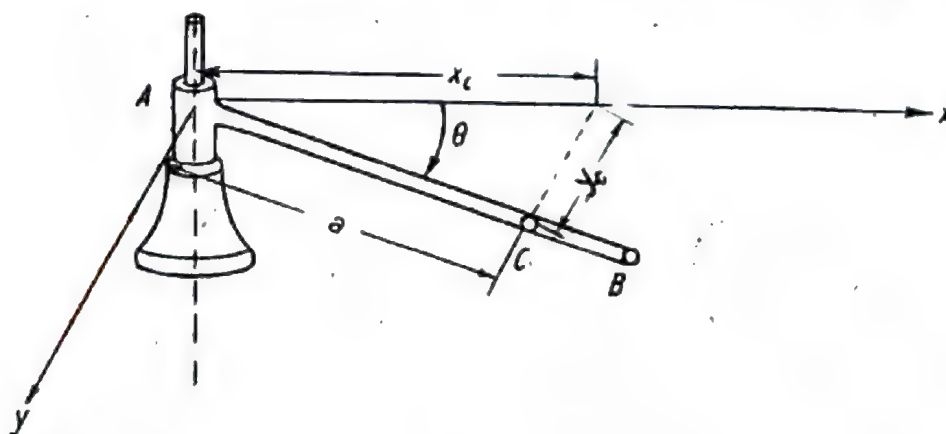


Fig. 1.4.

$AB$  al cărui capăt  $A$  este menținut fix (fig. 1.4), bara neputînd executa decît o rotație în jurul unei axe trecînd prin punctul  $A$ . Din punct de vedere practic, această mișcare a barei  $AB$



poate fi realizată menținându-i fix capătul  $A$  cu ajutorul unei legături denumită *articulație*. Este ușor de văzut că pentru determinarea poziției barei  $AB$  este necesar un singur parametru: unghiul  $\theta$  făcut de direcția barei cu o direcția  $Ax$ , fixă în planul său. Poziția aceleiași bare mai poate fi determinată însă și în modul următor: se alege pe bara  $AB$  un punct oarecare, de exemplu punctul  $C$ , situat la distanța  $a$  de capătul  $A$ ; cunoscând coordonatele  $x_C$  și  $y_C$  ale acestui punct în raport cu un sistem de axe fixe rectangulare  $xAy$ , poziția barei este de asemenea determinată. Ne aflăm în fața a două moduri diferite de a caracteriza poziția aceluiași corp; în primul dintre ele, am folosit o singură mărime geometrică (unghiul  $\theta$ ), în cel de-al doilea, am folosit două mărimi geometrice (distanțele  $x_C$  și  $y_C$ ). Deosebirea esențială dintre aceste două cazuri o constituie faptul că pe cînd în primul caz unghiul  $\theta$  putea lua valori arbitrare, adică oricărei valori a unghiului  $\theta$  îi corespunde o poziție bine precizată a barei  $AB$ , în cel de-al doilea caz distanțele  $x_C$  și  $y_C$  nu pot lua valori arbitrare. Într-adevăr, este ușor de văzut că în acest caz ele trebuie să fie legate prin relația:

$$x_C^2 + y_C^2 = a^2. \quad (1.1)$$

Această relație exprimă din punct de vedere geometric faptul că punctul  $C$  trebuie să se afle pentru orice poziție a barei pe cercul cu centrul în  $A$ , de rază  $AC = a$ , situat în planul  $xAy$ . Orice sistem de valori  $x_C, y_C$  care nu respectă relația (1.1) nu poate contribui în nici un fel la precizarea poziției barei  $AB$ .

Într-adevăr, dacă distanța  $AC$  are valoarea  $a = 1$  m,  $x_C$  nu poate avea valoarea 1,5 m.

Deoarece între coordonatele  $x_C$  și  $y_C$  există relația (1.1), ele se numesc *mărimi geometrice neindependente*, spre deosebire de unghiul  $\theta$  care poate lua orice valori, și care este numit *mărime geometrică independentă*.

c) **Grade de libertate.** În general, poziția unui anumit corp sau a unui sistem de corpuri față de un sistem de referință poate fi precizată cu ajutorul unui număr oarecare de mărimi geometrice independente între ele: fiecărui sistem de valori arbitrare (între anumite limite) ale acestor mărimi îi corespunde o anumită poziție a corpului considerat, bine precizată față de sistemul de referință dat. Se zice că un sistem material are  $n$  grade de libertate dacă poziția sa în spațiu poate fi precizată prin  $n$  mărimi geometrice independente. Astfel, de exemplu paralelipipedul din figura 1.3 are trei grade de libertate, iar bara din figura 1.4 are un singur grad de libertate.



## 9. Părțile mecanicii

Pentru ușurarea studiului echilibrului și mișcării corpurilor, mecanica se împarte în trei părți, care se ocupă cu rezolvarea mai multor probleme.

*Statica* se ocupă cu două mari probleme:

— problema reducerii sistemelor de forțe, sau a înlocuirii sistemelor compuse din mai multe forțe, cu alte sisteme mai simple, care produc același efect ca și sistemul inițial;

— problema echilibrului corpurilor, adică a condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească forțele aplicate unui corp pentru ca acesta să fie în echilibru.

*Cinematica* se ocupă cu studierea mișcării mecanice a corpurilor numai din punct de vedere geometric, fără a ține seama de forțele care le acționează și de masele lor.

*Dinamica* studiază mișcările corpurilor ținând seama de forțele care acționează corpurile și de masele acestor corpuri stabilind legătura dintre forțele care acționează un corp și caracterul mișcării sale.

Toate aceste trei părți ale mecanicii prezintă o deosebită importanță pentru diferitele sectoare ale tehnicii.



## Partea a II-a

# STATICA SISTEMELOR MATERIALE

### Capitolul II

## PRIMA PROBLEMĂ A STATICII : REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE

### 1. Generalități

În această primă parte a staticii se arată modul în care un sistem de forțe compus dintr-un număr oricât de mare de forțe, aplicate unui corp se poate înlocui, fără a-i modifica efectul, cu un alt sistem mai simplu.

Această operație de înlocuire, denumită *reducere*, prezintă o deosebită importanță, deoarece ea dă posibilitatea simplificării problemelor puse de practică, a încadrării lor în câteva tipuri de probleme simple prin studierea cărora se poate realiza o mare economie de timp.

### 2. Forța ca vector; reprezentarea și măsurarea forțelor

Prima și cea mai importantă mărime mecanică pe care o întâlnim în statică este *forța*; ea este o *mărime vectorială*, care măsoară interacțiunea mecanică a corpurilor din natură. Datorită acestui fapt, forța se caracterizează printr-un număr de patru elemente, și anume:

- punct de aplicație;
- direcție, adică dreaptă în lungul căreia acționează;
- sens în care acționează pe direcția sa (pe orice direcție există două sensuri);
- modul sau intensitate a forței.



Mărimea matematică cu ajutorul căreia se reprezintă toate mărimile vectoriale din natură este *vectorul*; el se reprezintă grafic printr-o săgeată; originea săgeții reprezintă punctul de aplicație al vectorului, direcția săgeții este direcția vectorului, sensul săgeții este sensul vectorului, iar distanța de la origine la vârful săgeții reprezintă, la o scară anumită, modulul vectorului (fig. 2.1).

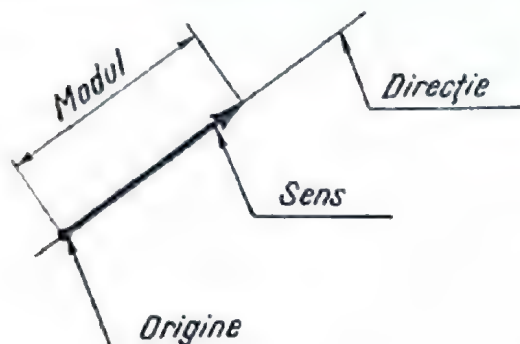


Fig. 2.1.

Pentru a distinge între ele mărimile scalare de cele vectoriale, pe acestea din urmă le vom nota cu o bară deasupra (de exemplu forța  $\vec{F}$ ).

Acțiunile forțelor se întâlnesc pretutindeni în natură; astfel, datorită forței de gravitație corpurile sînt atrase spre centrul Pămîntului, datorită forței vîntului este acționată o moară de vînt sau este pusă în mișcare o corabie cu pînze, datorită forței vaporilor, pistonul unei mașini cu abur este pus în mișcare, datorită forței magnetice a unui magnet o bucată de oțel este atrasă ș.a.m.d.

Simpla constatare calitativă a acestor efecte nu poate fi însă de folos; pentru a măsura efectele forțelor, trebuie măsurate intensitățile lor. Pentru aceasta s-a ales ca unitate greutatea pe care o are 1 dm<sup>3</sup> de apă distilată la 4°C, la nivelul mării și la latitudinea de 45°. Această unitate a fost denumită *kilogram-forță* și notată cu simbolul kgf. în sistemul MKfS.

Pentru măsurare (compararea forțelor cu unitatea de măsură) s-au construit aparate speciale, numite *dinamometre*. Cel mai simplu dinamometru este arătat în figura 2.2. La acest aparat, intensitatea unei forțe este măsurată cu ajutorul deformației unui resort  $AB$ , care, în anumite limite, este proporțională cu forțele aplicate.

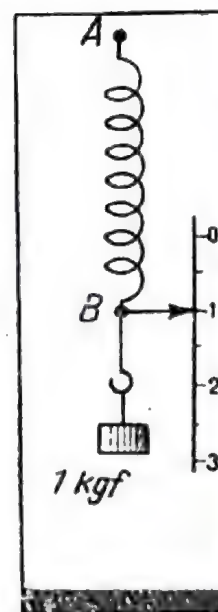


Fig. 2.2.

O construcție mai perfecționată este arătată în figura 2.3, *a* și *b*. Aci, lamele elastice,  $AB$  și  $CD$  se depărtează sub acțiunea forțelor aplicate, indicînd pe un cadran intensitățile acestor forțe. Dacă este nevoie să se măsoare o forță care variază în timp, se folosește un dinamometru înregistrator, la care un mecanism se amplifică mult deformațiile



Mărimea matematică cu ajutorul căreia se reprezintă toate mărimile vectoriale din natură este *vectorul*; el se reprezintă grafic printr-o săgeată; originea săgeții reprezintă punctul de aplicație al vectorului, direcția săgeții este direcția vectorului, sensul săgeții este sensul vectorului, iar distanța de la origine la vârful săgeții reprezintă, la o scară anumită, modulul vectorului (fig. 2.1).

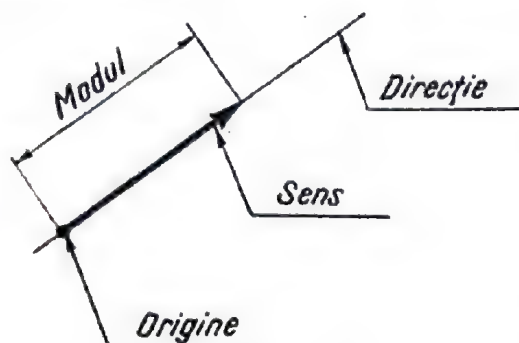


Fig. 2.1.

Pentru a distinge între ele mărimile scalare de cele vectoriale, pe acestea din urmă le vom nota cu o bară deasupra (de exemplu forța  $\vec{F}$ ).

Acțiunile forțelor se întâlnesc pretutindeni în natură; astfel, datorită forței de gravitație corpurile sînt atrase spre centrul Pămîntului, datorită forței vîntului este acționată o moară de vînt sau este pusă în mișcare o corabie cu pînze, datorită forței vaporilor, pistonul unei mașini cu abur este pus în mișcare, datorită forței magnetice a unui magnet o bucată de oțel este atrasă ș.a.m.d.

Simpla constatare calitativă a acestor efecte nu poate fi însă de folos; pentru a măsura efectele forțelor, trebuie măsurate intensitățile lor. Pentru aceasta s-a ales ca unitate greutatea pe care o are 1 dm<sup>3</sup> de apă distilată la 4°C, la nivelul mării și la latitudinea de 45°. Această unitate a fost denumită *kilogram-forță* și notată cu simbolul kgf. în sistemul MKfS.

Pentru măsurare (compararea forțelor cu unitatea de măsură) s-au construit aparate speciale, numite *dinamometre*. Cel mai simplu dinamometru este arătat în figura 2.2. La acest aparat, intensitatea unei forțe este măsurată cu ajutorul deformației unui resort  $AB$ , care, în anumite limite, este proporțională cu forțele aplicate.

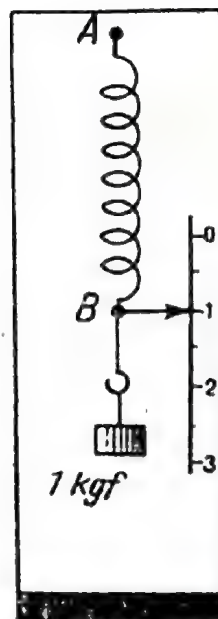


Fig. 2.2.

O construcție mai perfecționată este arătată în figura 2.3, *a* și *b*. Aci, lamele elastice,  $AB$  și  $CD$  se depărtează sub acțiunea forțelor aplicate, indicînd pe un cadran intensitățile acestor forțe. Dacă este nevoie să se măsoare o forță care variază în timp, se folosește un dinamometru înregistrator, la care un mecanism se amplifică mult deformațiile



resortului și le înscrie cu ajutorul unei penițe pe o bandă de hîrtie care se desfășoară uniform cu ajutorul unui mecanism de ceas (fig. 2.3,a).

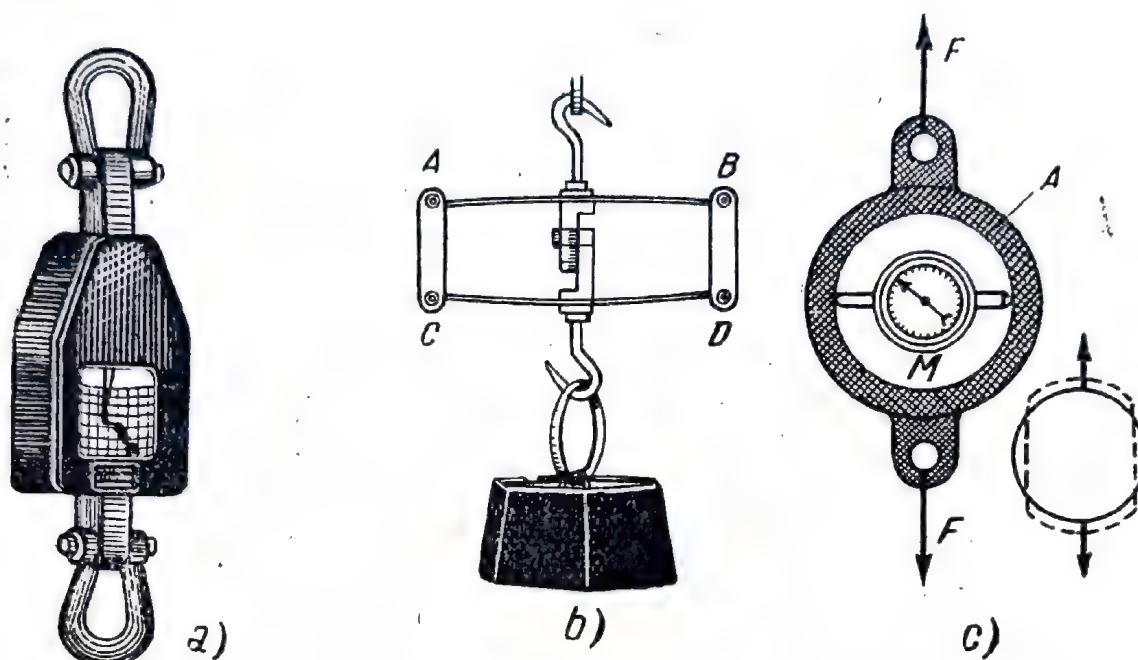


Fig. 2.3.

Un alt tip de dinamometru, denumit *inel dinamometric*, este arătat în figura 2.3,c. Sub acțiunea forței  $F$ , inelul  $A$  se ovalizează; citind valoarea acestei ovalizări cu ajutorul micro-metrului  $M$  se poate afla intensitatea forței  $F$ .

Un alt tip de dinamometru este *dinamometrul hidraulic* (fig. 2.4), la care forța de măsurat comprimă un lichid; presiunea care rezultă este transmisă unui manometru gradat direct în kgf sau tf (1 tf = 1 000 kgf), pe care se citește modulul forței  $F$ .

Dinamometrele au largi întrebuințări în practică la măsurarea intensității forțelor; ast-

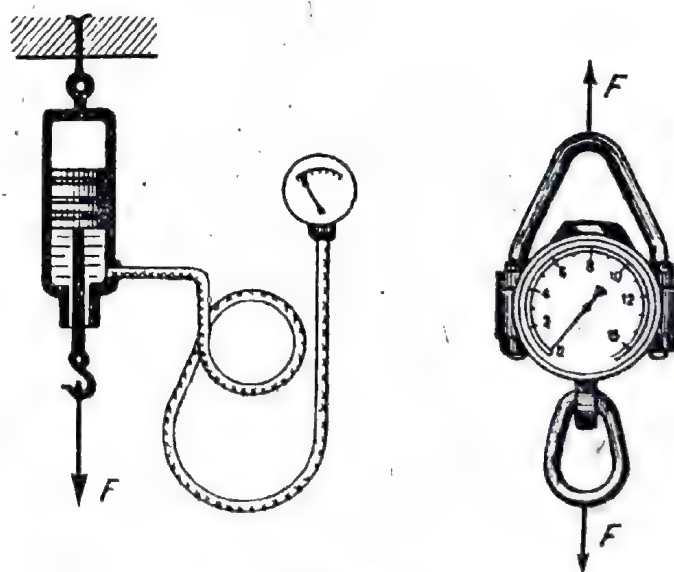


Fig. 2.4.



fel, ele sînt întrebuintate în transporturi, la măsurarea tracțiunii necesare remorcării vehiculelor (în navigația fluvială, calea ferată), la liniile electrice pentru verificarea tensiunii în firele acestor linii, în laboratoare la măsurarea forțelor suportate de diferite materiale supuse încercărilor, în uzinele metalurgice, mine, porturi, gări, la controlul greutateii materialelor transportate.

### 3. Noțiuni elementare despre vectori

a) **Diferite feluri de vectori.** Să considerăm un paralelipiped care se deplasează rectiliniu pe o masă (fig. 2.5); un punct  $A$  al acestui paralelipiped are o deplasare din  $A$  în  $A'$ , care se poate reprezenta prin vectorul  $\overline{AA'}$ , avînd ca punct de aplicație punctul  $A$ , ca direcție și sens direcția și sensul mișcării de translație, iar ca modul distanța  $AA'$ . Să schimbăm punctul de aplicație al vectorului  $\overline{v} = \overline{AA'}$  din  $A$  în alt punct  $B$  al paralelipipedului, păstrîndu-i mărimea, direcția și sensul neschimbate.

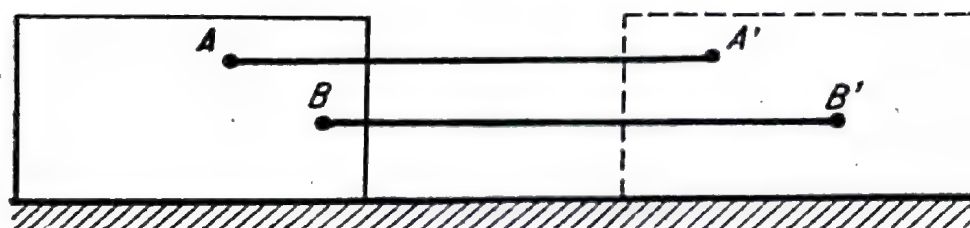


Fig. 2.5.

Se constată că același vector  $\overline{v}$  reprezintă tot o deplasare, și anume deplasarea punctului  $B$ , deoarece într-o mișcare de translație toate punctele parcurg distanțe egale. Același lucru se întîmplă dacă schimbăm originea vectorului în oricare alt punct al paralelipipedului. Asemenea vectori care reprezintă o aceeași mărime fizică, indiferent de punctul lor de aplicație, deci cărora le putem schimba originea în orice punct din spațiu, păstrîndu-le modulul, direcția și sensul neschimbate se numesc *vectori liberi*.

În același mod vom defini drept *vectori alunecători* acei vectori cărora le putem schimba originea în orice punct de pe propriul lor suport păstrîndu-și neschimbate modulul, direcția și sensul.



Forța aplicată unui corp solid rigid constituie un exemplu de vector alunecător; într-adevăr, dacă tragem de un cărucior sau dacă îl împingem cu o forță astfel încât forțele aplicate în cele două cazuri să aibă același modul, aceeași orientare și același suport, vom obține același efect.

Vectorii cărora nu le putem schimba punctul de aplicație, modulul, direcția și sensul se numesc *vectori legați*. Un exem-

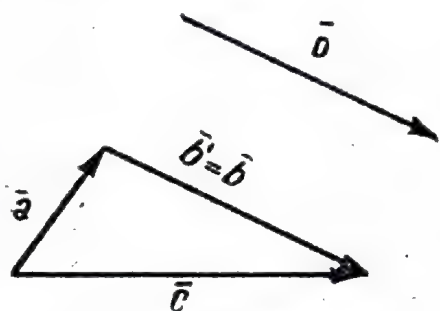


Fig. 2.6.

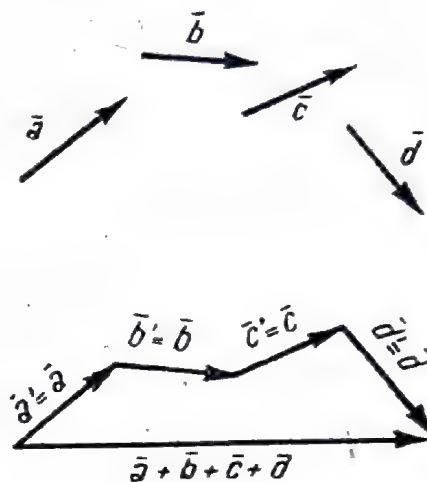


Fig. 2.7.

plu de vector legat îl constituie forța aplicată unui corp solid deformabil; într-adevăr, imediat ce schimbăm punctul de aplicație al forței, obținem deformații diferite ale corpului respectiv.

b) **Suma și diferența a doi vectori.** Prin definiție, *suma* sau *rezultanta* a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este un vector  $\vec{c}$  care se obține ca diagonală a paralelogramului construit pe cei doi vectori dați. El mai poate fi construit și astfel: se duce vectorul  $\vec{b}'$  paralel, egal și de același sens cu  $\vec{b}$  ( $\vec{b}' = \vec{b}$ ) astfel încât originea sa să coincidă cu extremitatea vectorului  $\vec{a}$ ; unind originea vectorului  $\vec{a}$  cu extremitatea vectorului  $\vec{b}'$  se obține vectorul  $\vec{c}$  (fig. 2.6). Această definiție se poate generaliza pentru un număr oarecare de vectori. Spre exemplu, în figura 2.7 suma celor patru vectori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  a fost construită aducând vectorii  $\vec{a}' = \vec{a}$ ,  $\vec{b}' = \vec{b}$ ,  $\vec{c}' = \vec{c}$ ,  $\vec{d}' = \vec{d}$  astfel încât ei să formeze un poligon, în care originea unui vector

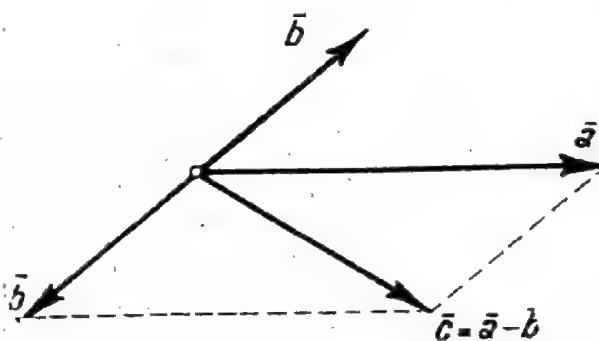


Fig. 2.8.



coincide cu extremitatea celuilalt ; vectorul de închidere  $\bar{s}$  reprezintă suma lor :

$$\bar{s} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}. \quad (2.1)$$

Vectorii  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ ,  $\bar{d}$  se numesc *componentele vectorului  $\bar{s}$*  după direcțiile pe care sînt dirijați. Operația prin care se determină aceste componente se numește *descompunerea vectorului  $\bar{s}$*  în componente pe direcțiile date; ea va fi examinată mai jos.

*Scăderea* a doi vectori se face adunînd primului vector pe cel de-al doilea vector, luat cu sens schimbat și cu același modul (fig. 2.8) :

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}).$$

c) **Înmulțirea unui vector cu un scalar.** Deoarece  $\bar{a} + \bar{a} = 2\bar{a}$  (fig. 2.9), rezultă că pentru a înmulți vectorul  $\bar{a}$  cu 2 va trebui să luăm pe direcția lui  $\bar{a}$  doi vectori așezați în continuare. În

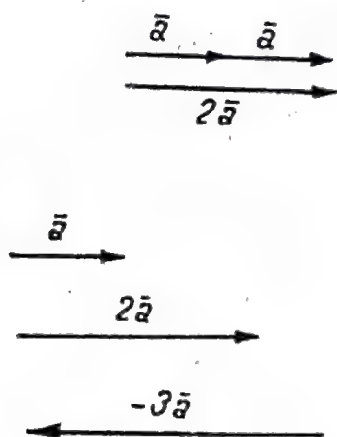


Fig. 2.9.

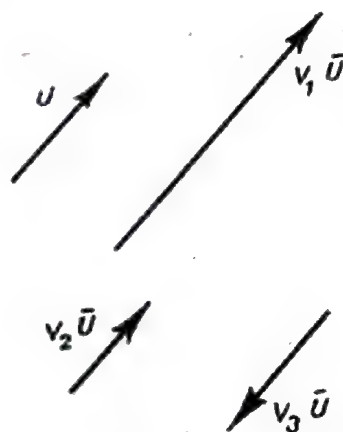


Fig. 2.10.

general, prin înmulțirea unui vector  $\bar{a}$  cu un scalar  $m$  (pozitiv, negativ, întreg sau fracționar) vom obține un alt vector  $\bar{c} = m\bar{a}$ , avînd direcția lui  $\bar{a}$ , același sens sau sens contrar, după cum  $m$  este pozitiv, sau negativ iar modulul egal cu valoarea absolută a lui  $m$  înmulțită cu modulul vectorului  $\bar{a}$ .

d) **Versorul unei direcții.** Dacă pe o direcție oarecare  $\Delta$  luăm un vector  $\bar{u}$  al cărui modul este egal cu unitatea, orice vector paralel cu această direcție se exprimă prin produsul dintre un scalar  $\bar{v}$  și vectorul unitate :

$$\bar{v} = v\bar{u}. \quad (2.2)$$



În cazul cînd vectorul  $\vec{v}$  are același sens cu vectorul  $\vec{u}$ , scalarul  $v$  este pozitiv; în cazul cînd vectorul  $\vec{v}$  are sens contrar cu versorul  $\vec{u}$ ,  $v$  este negativ.

Vectorul  $\vec{u}$  se numește vectorul unitate sau versorul direcției considerate (fig. 2.10).

e) **Unghiul a doi vectori.** Vom denumi drept unghi a doi vectori unghiul mai mic ca  $180^\circ$  format între suporturile lor care poartă săgețile ce indică sensurile vectorilor (fig. 2.11).

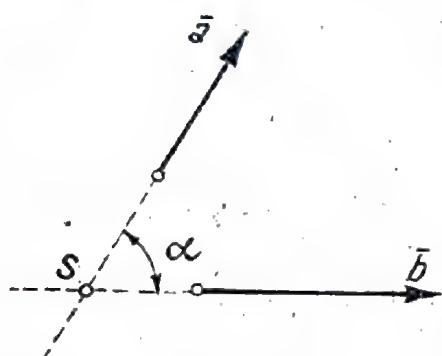


Fig. 2.11.

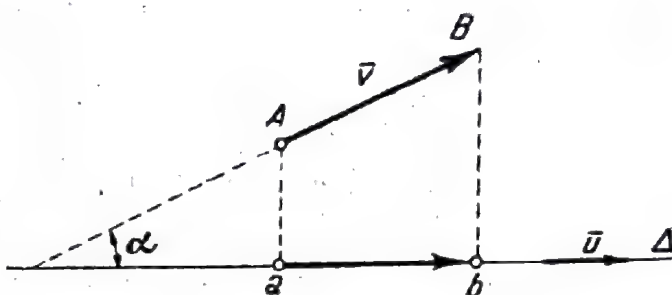


Fig. 2.12.

Unghiul unui vector cu o axă este unghiul format de vector cu versorul axei respective.

f) **Proiecția unui vector pe o axă.** Vectorul și axa se află în același plan. Proiecția unui vector  $\vec{v}$  pe o axă  $\Delta$  este vectorul  $\overline{ab}$  de pe axa  $\Delta$  limitat între proiecțiile extremităților  $A$  și  $B$  ale vectorului pe această axă (fig. 2.12). Ca modul, el este egal cu produsul dintre modulul vectorului și modulul cosinusului unghiului format de direcțiile pozitive ale vectorului și axei:

$$\text{pr}_{\Delta} \vec{v} = \overline{ab} = |\vec{v}| |\cos \alpha|. \quad (2.3)$$

Se vede că proiecția unui vector este îndreptată în același sens cu sensul pozitiv al axei pentru  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$  și în sens contrar pentru  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ .

În baza formulei (2.2), scalarul  $v$  este pozitiv în primul caz și negativ în cel de-al doilea.

Vectorul și axa nu se află în același plan. În acest caz, proiecțiile extremităților vectorului  $\vec{v} = \overline{AB}$  pe axa  $\Delta$  se obțin cu ajutorul a două plane  $P_A$  și  $P_B$  perpendiculare pe axa  $\Delta$  trecînd prin  $A$  și  $B$  (fig. 2.13). Valoarea proiecției este dată tot de formula (2.3).

g) **Teorema proiecțiilor** se enunță astfel : suma proiecțiilor unui număr oarecare de vectori pe o axă este egală cu proiecția vectorului sumă a vectorilor dați, pe aceeași axă (fig. 2.14).

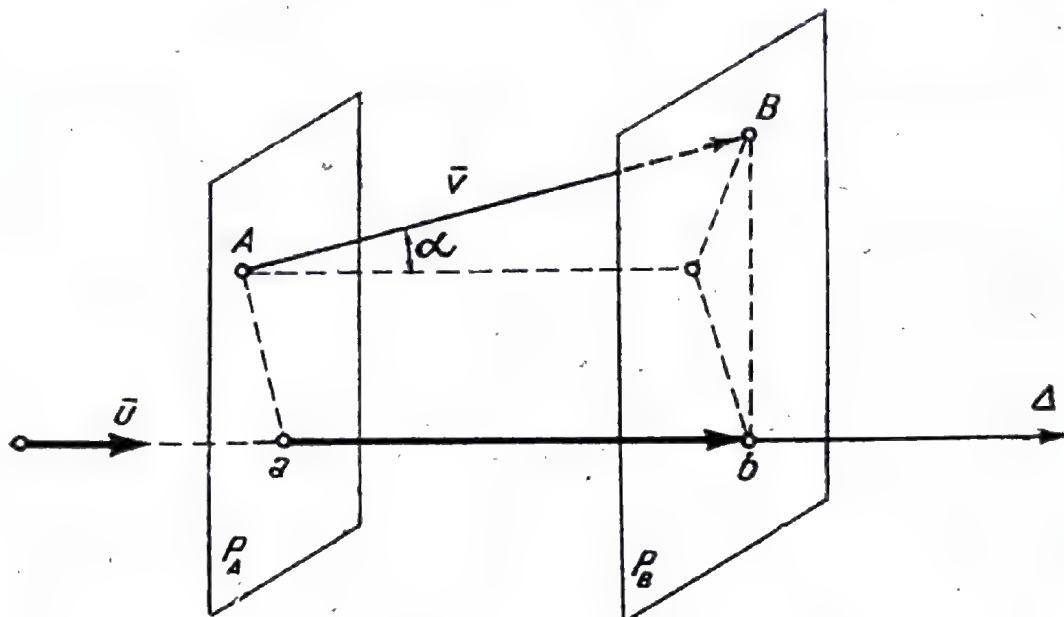


Fig. 2.13.

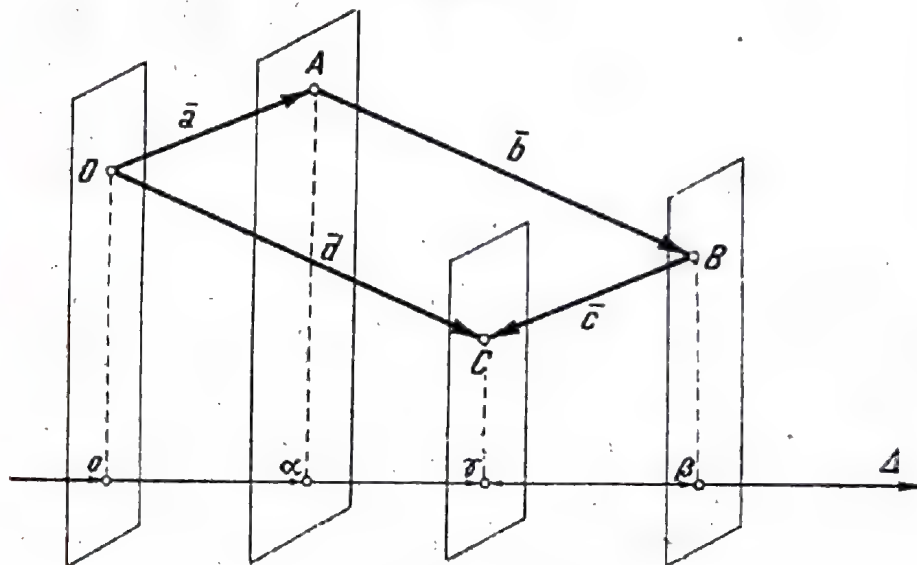


Fig. 2.14.

Într-adevăr, să considerăm suma :

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

și să proiectăm fiecare vector pe o axă  $\Delta$ . Vom avea :

$$\text{pr}_{\Delta} \vec{a} = O\alpha,$$

$$\text{pr}_{\Delta} \vec{b} = \alpha\beta,$$

$$\text{pr}_{\Delta} \vec{c} = \beta\gamma,$$

$$\text{pr}_{\Delta} \vec{d} = O\gamma.$$



Geometric, se vede că avem pe axa  $\Delta$  :

$$O\gamma = O\alpha + \alpha\beta - \beta\gamma$$

sau

$$\text{pr}_{\Delta} \bar{d} = \text{pr}_{\Delta} \bar{a} + \text{pr}_{\Delta} \bar{b} + \text{pr}_{\Delta} \bar{c}, \quad (2.4)$$

ceea ce demonstrează teorema enunțată (proiecția pe axa  $\Delta$  a vectorului  $\bar{c}$  este îndreptată în sensul negativ al axei).

#### 4. Noțiuni de bază privind reducerea sistemelor de forțe

a) **Forța ca vector alunecător.** Să efectuăm următoarea experiență : asupra unui vagon aflat pe o șină rectilinie să aplicăm o forță  $\bar{F}$  dirijată în direcția acestei șine (fig. 2.15) ; forța  $\bar{F}$  o vom aplica succesiv în două locuri : mai întâi în partea din față a vagonului și apoi în partea din spate. După câte ne este cunoscut din practică, vagonul va căpăta în ambele cazuri aceeași mișcare. Aceasta revine la a spune că *mutarea punctului de aplicare al forței  $\bar{F}$  pe suportul său n-a influențat cu nimic mișcarea vagonului*; de aci tragem concluzia că orice forță care acționează un solid rigid poate fi considerată ca vector alunecător, adică își poate muta punctul de aplicare oriunde pe suportul său, fără ca prin aceasta să-și modifice efectul asupra solidului respectiv.

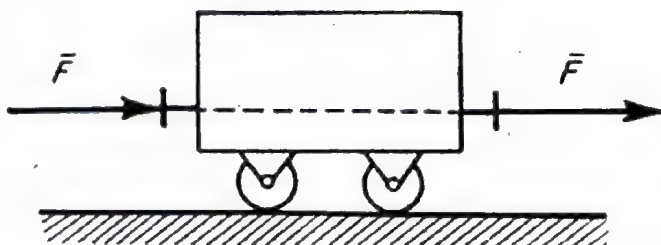


Fig. 2.15.

b) **Momentul unei forțe în raport cu un punct.** Să considerăm un corp care se poate roti în jurul unei axe fixe (o roată, o pîrghie) și să ne întrebăm cum trebuie aplicată o forță  $F$  asupra acestui corp astfel încît ea să-i producă cel mai mare „efect de rotație“ ? Vom constata că dacă într-un punct  $A$ , aflat la o depărtare fixă de axa de rotație  $O$ , vom aplica pe rînd forțe  $\bar{F}$  perpendiculare pe dreapta  $OA$  din ce în ce mai mari (fig. 2.16), roata se va pune în mișcare de fiecare dată, din ce în ce mai ușor. Dar tot experiența ne mai arată că putem pune roata în mișcare din ce în ce mai ușor, cu aceeași forță, dacă ne depăr-

tăm însă cu punctul de aplicație al forței de axa de rotație. Iată deci că nu numai mărimea forței  $\vec{F}$  este determinată în obținerea unei anumite mișcări de rotație, ci și poziția ei în raport cu axa de rotație. Deoarece experiența arată că forțe

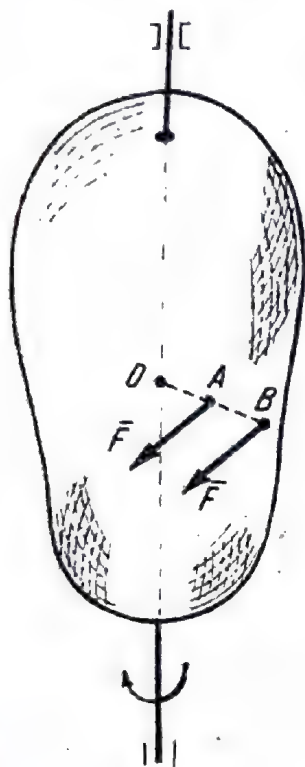


Fig. 2.16.

de mărimi diferite așezate la distanțe diferite provoacă aceeași mișcare dacă este îndeplinită condiția ca produsul dintre mărimea forței și distanța dintre suportul forței și axa de rotație să fie același, s-a dedus că *mărimea care măsoară efectul produs de o forță asupra unui corp aflat în rotație este produsul dintre modulul forței și distanța de la forță la axa de rotație.*

Mărimea care măsoară efectul de rotație al unui corp în jurul unui punct, ca rezultat al acțiunii unei forțe asupra corpului respectiv, este denumită în mecanică *moment*.

Vom denumi moment al forței  $\vec{F}$  în raport cu un punct  $O$  oarecare din spațiu, produsul dintre modulul forței  $\vec{F}$  și lungimea perpendiculară coborâte din punctul  $O$  pe suportul forței  $\vec{F}$  (fig. 2.17):

$$M_O = Fd. \quad (2.5)$$

Deoarece o anumită forță acționînd asupra unui corp la o distanță dată de axa de rotație poate roti corpul într-un sens sau în celălalt, va trebui să distingem acest fapt însoțind valoarea momentului de un semn; *vom considera pozitiv momentul care rotește corpul în sensul invers acelor unui ceasornic și negativ momentul care îl rotește în sens contrar.* Momentul unei forțe în raport cu un punct este deci o mărime caracterizată prin valoare numerică și sens. Să arătăm acum că momentul unei forțe în raport cu un punct este o mărime care posedă și direcție. Pentru aceasta, să efectuăm o experiență simplă cu aparatul din figura 2.18. Aparatul se compune dintr-o roată și un ax  $O$ , care la rîndul său este montat liber pe axul  $AB$  care se poate roti în jurul verticalei. Să aplicăm roții o forță verticală  $\vec{F}$ ; roata se va pune în mișcare în jurul axei sale proprii  $O$ , dirijată orizontal. Să rotim acum forța  $\vec{F}$  în jurul punctului de



aplicație, fără a-i schimba direcția pînă la centrul roții și nici valoarea sa, pînă ce suportul ei devine orizontal. Vom constata că roata nu se mai învîrte în jurul axei orizontale  $O$ , ci în jurul axei verticale  $AB$ . Iată deci că deși modulul forței  $\vec{F}$  și punctul

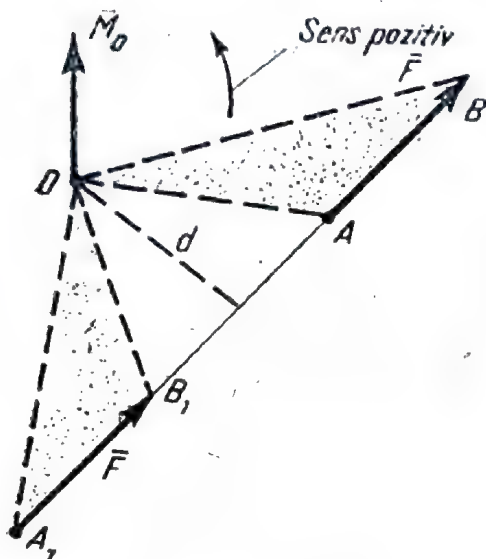


Fig. 2.17.

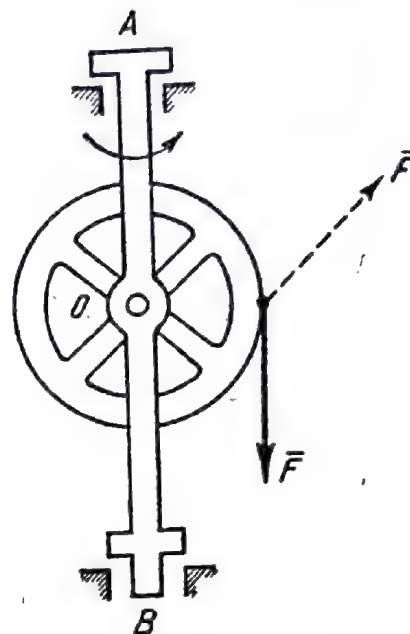


Fig. 2.18.

său de aplicare rămîn aceleași, totuși efectul momentului în raport cu punctul  $O$  este diferit dacă planul determinat de vectorul forță și de punctul față de care se ia momentul își schimbă orientarea în spațiu.

Această constatare practică a condus la concluzia că *momentul unei forțe în raport cu un punct este o mărime vectorială* ale cărei caracteristici sînt următoarele (v. fig. 2.17) :

— *punctul de aplicație* se află în punctul față de care se ia momentul, deoarece, pentru o forță dată, o dată cu schimbarea acestui punct se schimbă și valoarea momentului ;

— *direcția* sa este perpendiculară pe planul format de forța dată și de punctul față de care se ia momentul (ea este direcția axei față de care se rotește corpul) ;

— *mărimea* sa este egală cu produsul dintre forța și distanța de la punct la suportul forței ;

— *sensul* vectorului moment este astfel încît un observator așezat în lungul vectorului, cu capul în vîrfurile lui, să vadă rotindu-se planul determinat de forță și punct în sens invers acelor unui ceasornic.

*Proprietățile momentului.* Din definiția momentului unei forțe în raport cu un punct rezultă următoarele proprietăți:

— momentul unei forțe în raport cu un punct situat pe suportul său este nul, pentru că în acest caz distanța de la punct la suportul forței este nulă;

— valoarea momentului unei forțe în raport cu un punct, este egală cu dublul ariei triunghiului format de forța dată și de punctul față de care se ia momentul (v. fig. 2.17):

$$M_O = Fd = 2 \times \text{aria } \Delta AOB; \quad (2.6)$$

— nici una dintre caracteristicile momentului nu se modifică dacă forța dată alunecă pe suportul său. Într-adevăr, punctul  $O$  și planul  $P$  rămân aceleași (deci punctul de aplicație și direcția rămân aceleași), sensul nu se modifică deoarece forța rămîne tot de aceeași parte a punctului față de care se ia momentul, iar mărimea rămîne aceeași deoarece (v. fig. 2.17):

$$\text{aria } \Delta AOB = \text{aria } \Delta A_1OB_1. \quad (2.7)$$

c) **Momentul unei forțe în raport cu o axă.** Momentul unei forțe în raport cu un punct măsoară efectul acestei forțe în raport cu axa perpendiculară pe planul format de forță și de punct; de multe ori, în aplicații este nevoie să cunoaștem efectul forței în raport cu o axă trecînd prin același punct, dar care diferă de axa perpendiculară pe planul format de forță și punct. Ca exemplu să considerăm tot aparatul din figura 2.18; la periferia roții să aplicăm o forță înclinată cu un unghi oarecare; datorită acțiunii acestei forțe, roata se va pune în mișcare atît în jurul

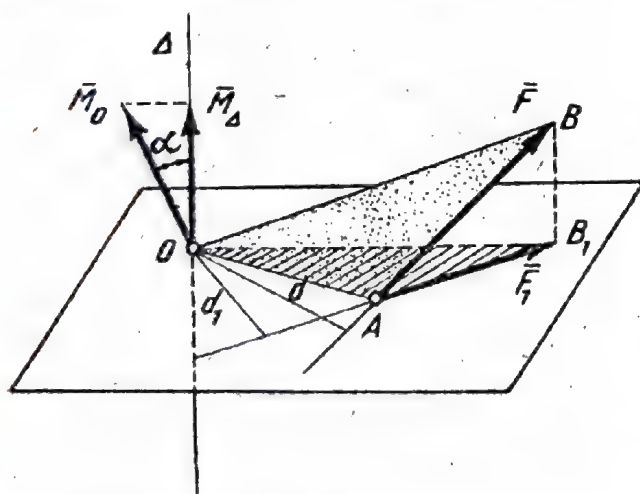


Fig. 2.19.

axei proprii  $O$  cît și în jurul axei verticale  $AB$ . Practica ne arată că mișcarea în jurul acestor axe se face mai repede sau mai încet (pentru o aceeași forță și distanță la punctul  $O$ ) în funcție de înclinarea forței. Efectul de rotire al forței  $\vec{F}$  în jurul acestor axe se măsoară prin momentul forței  $\vec{F}$  în raport cu axa respectivă. El se obține proiectînd



momentul forței  $\bar{F}$  în raport cu punctul  $O$  al axei (moment care este perpendicular pe planul format de forță și punct) pe axa respectivă. Vom avea deci (fig. 2.19):

$$M_{\Delta} = M_O \cos \alpha = Fd \cos \alpha. \quad (2.8)$$

Momentul unei forțe în raport cu o axă, fiind proiecția momentului aceleiași forțe în raport cu un punct de pe axa respectivă pe acea axă, este de asemenea un vector, care măsoară efectul de rotație produs de o forță în jurul acestei axe.

Să proiectăm forța  $\bar{F}$  pe un plan perpendicular pe axa față de care se ia momentul și să luăm momentul acestei proiecții în raport cu punctul unde axa întâlnește planul. Deoarece:

$$\text{aria } OAB_1 = \text{aria } OAB \cos \alpha, \quad (2.9)$$

înseamnă că momentul acestei proiecții în raport cu punctul  $O$  este egal cu momentul forței  $\bar{F}$  în raport cu axa  $\Delta$ ;

$$Fd \cos \alpha = F_1 d_1.$$

Momentul unei forțe în raport cu o axă este nul dacă aria  $OAB_1$  este nulă: aceasta se întâmplă atunci când forța  $\bar{F}$  este paralelă cu axa ( $F_1 = 0$ ) sau când întâlnește această axă ( $d_1 = 0$ ). Într-adevăr, după câte se știe din practică sau după câte se poate constata, efectuând experiențe pe aparatul din figura 2.18, un corp care se poate roti în jurul unei axe nu poate fi pus în mișcare niciodată cu o forță care este paralelă cu axa respectivă sau care o întretaie.

Dacă o forță este perpendiculară pe axa față de care se ia momentul, atunci valoarea momentului se obține înmulțind modulul forței cu lungimea perpendicularei comune dintre suportul forței și axă. Această situație se întâlnește foarte des în aplicații.

Procedînd astfel, am redus noțiunea de moment al unei forțe în raport cu o axă, la noțiunea de moment în raport cu un punct; de aceea toate proprietățile noțiunii de moment al unei forțe în raport cu un punct, se păstrează și în cazul noțiunii de moment în raport cu o axă.

Să calculăm momentele unei forțe în raport cu axe de coordonate ale unui sistem de axe  $Oxyz$ . Vom considera o forță  $\bar{F}$  aplicată într-un punct  $A$  și un sistem triortogonal de axe  $Oxyz$

(fig. 2.20). Forța  $\vec{F}$  are proiecțiile  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  pe axele de coordonate, iar punctul  $A$  are coordonatele  $x$ ,  $y$ ,  $z$  față de același sistem de axe.

Mai întâi observăm că forța  $F_x$  nu va da moment în raport cu axa  $Ox$  deoarece este paralelă cu ea; de asemenea, forța  $F_y$  nu va da moment în raport cu axa  $Oy$  și forța  $F_z$  în raport cu axa  $Oz$ .

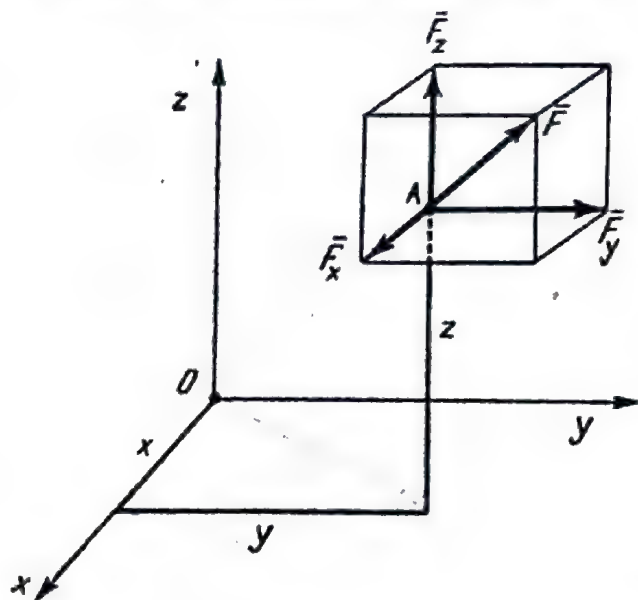


Fig. 2.20.

Față de axa  $Ox$  dau momente componentele  $F_y$  și  $F_z$ . Distanța de la componenta  $F_y$  la axa  $Ox$  este coordonata  $z$ , iar de la componenta  $F_z$  la axa  $Ox$  este coordonata  $y$ . Componenta  $F_y$  rotește axa  $Ox$  în sensul acelor ceasornicului (văzut din direcția săgeții de pe  $Ox$ ), iar componenta  $F_z$  rotește aceeași axă în sensul invers acelor ceasornicului; rezultă deci

că momentul componentei  $F_y$  în raport cu axa  $Ox$  este negativ, în timp ce momentul componentei  $F_z$  este pozitiv. Însumând valorile celor două momente cu semnul lor, obținem:

$$M_x = yF_z - zF_y$$

și în mod analog pentru celelalte axe (2.10)

$$M_y = zF_x - xF_z,$$

$$M_z = xF_y - yF_x.$$

d) **Cuplu.** Să considerăm un sistem de două forțe paralele, egale, având sensuri contrare și acționînd pe suporturi diferite; ele formează în mecanică un sistem de două forțe, denumit cu un singur cuvînd *cuplu*. El se întîlnește foarte des în aplicații; la rotirea unei șurubelnițe (fig. 2.21, a), a unei chei (fig. 2.21, b), a mînerului unei prese (fig. 2.21, c), a acului unei busole (fig. 2.21, d) etc. apar întodeauna asemenea perechi de forțe care formează un cuplu. Distanța dintre cele două forțe care for-



mează cuplul se numește *brațul cuplului*. Cuplul exercită asupra corpului cărui îi este aplicat o acțiune, datorită cărui corpul respectiv se rotește în jurul unei axe perpendiculare pe planul format de cele două forțe, denumit *planul cuplului*.

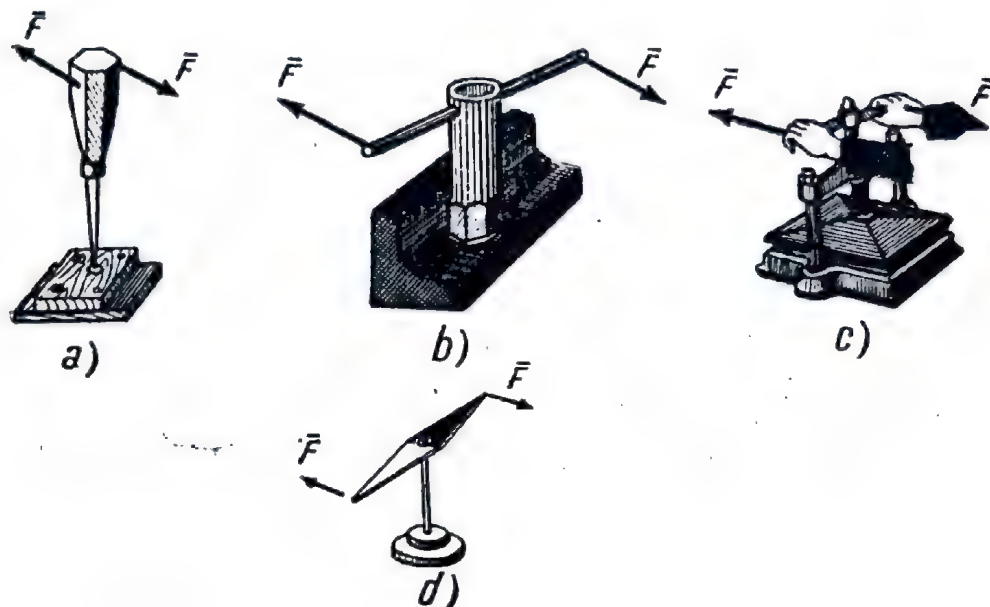


Fig. 2.21.

Acțiunea unui cuplu nu poate fi înlocuită cu aceea a unei singure forțe, adică sistemul format de cele două forțe care alcătuiesc cuplul nu poate fi redus la un sistem mai simplu.

Să calculăm suma momentelor forțelor cuplului în raport cu un punct oarecare din planul său; valoarea obținută o vom denumi *momentul cuplului*. Fie  $A$  un punct oarecare din planul cuplului; suma momentelor celor două forțe ale cuplului în raport cu acest punct este, ținând seama și de sens (fig. 2.22, a) :

$$M_A = F(d+x) - Fx = Fd. \quad (2.11)$$

Deoarece punctul  $A$  a fost arbitrar, rezultă că *suma momentelor forțelor cuplului în raport cu orice punct din planul său este o mărime constantă, egală cu produsul dintre modulul uneia dintre forțe și brațul cuplului*. Se poate arăta că această afirmație rămâne valabilă chiar dacă punctul  $A$  nu se află în planul cuplului, ci se găsește undeva în spațiu.

Momentul unui cuplu servește ca măsură a acțiunii de rotire pe care o exercită cuplul respectiv asupra corpului cărui îi este aplicat; ca și momentul unei forțe, momentul cuplului este un produs dintre o forță și o lungime; el se măsoară în teh-

nică în unitățile: kilogram-forță-metru, kilogram-forță-centimetru sau tonă-forță-metru.

Trebuie observat faptul că momentul unui cuplu, fiind compus din suma momentelor a două forțe, este și el o mărime

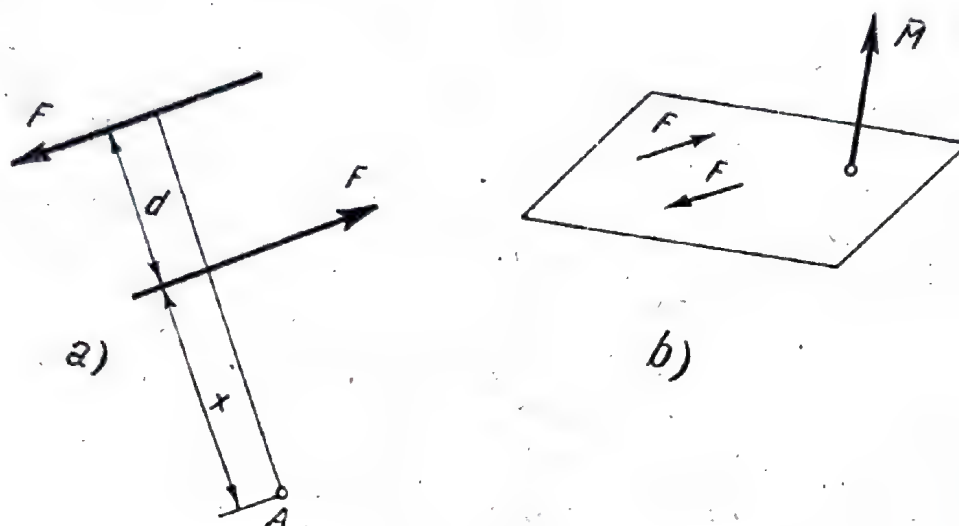


Fig. 2.22.

vectorială; într-adevăr, pentru cunoașterea acțiunii unui cuplu asupra corpului căruia îi este aplicat, trebuie cunoscută valoarea acesteia acțiuni (produsul  $Fd$ ), axa în jurul căreia are loc rotația, axă care este perpendiculară pe planul cuplului (direc-

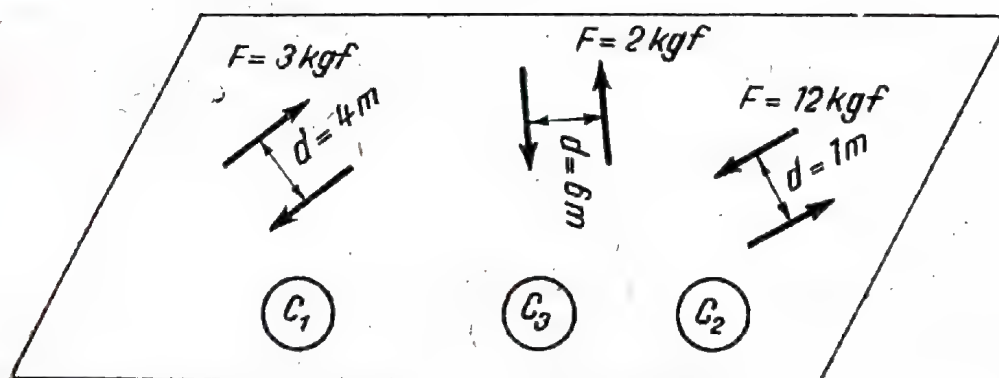


Fig. 2.23.

ția vectorului) și sensul rotației (sensul vectorului moment). Punctul de aplicație al vectorului moment al unui cuplu poate fi ales oriunde în planul său sau chiar în spațiu, deoarece, după cum am văzut mai sus, suma momentelor vectorilor care alcă-



tuiesc cuplul este aceeași, oricare ar fi punctul față de care se calculează (fig. 2.22, *b*). Aceasta revine la a spune că *vectorul cuplu este un vector liber*; adunarea cuplurilor se face după regulile de adunare a vectorilor (v. fig. 2.7). Astfel, un sistem de cupluri care acționează în același plan poate fi înlocuit printr-un cuplu situat în planul comun, deoarece adunarea vectorilor moment ale cuplurilor revine la adunarea unor vectori coliniari.

Vom înțelege prin *cupluri echivalente* două sau mai multe cupluri care au vectorii moment egali (mărime, direcție, sens). Astfel cuplurile  $C_2$  și  $C_3$  din figura 2.23 sînt echivalente, dar cuplurile  $C_1$  și  $C_2$  nu sînt echivalente, deoarece vectorii moment nu sînt egali (au aceeași direcție și modul, dar au sensuri diferite).

**e) Diferite sisteme particulare de forțe și cupluri concentrate care acționează sistemele materiale.** Asupra corpurilor din natură sau ale organelor de mașini întîlnite în tehnică acționează diferite forțe și cupluri; în mecanică un ansamblu de mai multe forțe poartă denumirea de *sistem de forțe*. După modul în care forțele unui sistem sînt așezate în spațiu, ele pot fi încadrate într-unul din următoarele sisteme particulare:

— *sistem de forțe coliniare* este acel sistem de forțe la care toți vectorii forță au drept suport o aceeași dreaptă;

— *sistemul de forțe concurente și coplanare* este acel sistem de forțe la care suporturile vectorilor forță sînt situate în același plan și trec printr-un același punct din planul lor;

— *sistem de forțe concurente în spațiu* este acel sistem de forțe la care suporturile vectorilor forță sînt situate oricum în spațiu, dar trec printr-un același punct;

— *sistem de forțe coplanare paralele* este acel sistem de forțe la care suporturile vectorilor forță sînt situate în același plan și sînt paralele cu o direcție dată din acest plan;

— *sistem de forțe coplanare oarecare* este acel sistem de forțe la care suporturile vectorilor sînt situate oricum într-un același plan;

— *sistem de forțe paralele în spațiu* este acel sistem de forțe la care suporturile vectorilor forță sînt situate oricum în spațiu, dar paralele cu o direcție dată;

— *sistem de cupluri situate în același plan* este acel sistem de forțe la care perechile de vectori forță care alcătuiesc cuplurile sînt situate în același plan (vectorii moment ai fiecăruia

dintre cupluri sînt dirijați perpendicular pe planul forțelor cuplurilor, formînd un sistem de vectori coliniari);

— *sistem de cupluri oarecare în spațiu* este acel sistem de forțe la care perechile de vectori forță care alcătuiesc cuplurile sînt situate în plane diferite din spațiu (vectorii moment ai acestor cupluri sînt dirijați oricum în spațiu, perpendiculari pe planele care conțin forțele);

— *sistem de forțe și cupluri oarecare în spațiu* este cel mai general sistem de forțe, la care vectorii forță și vectorii moment ai cuplurilor sînt dirijați oricum în spațiu.

**f) Sisteme echivalente; operații elementare de echivalență:**  
Să presupunem că asupra unui corp acționează pe rînd două sisteme de forțe care produc același efect; aceste sisteme prezintă o mare importanță în mecanică și sînt denumite *sisteme echivalente*.

O axiomă evidentă este aceea care afirmă că *două sisteme de forțe echivalente cu un al treilea sînt echivalente între ele*.

Trecerea de la un sistem la altul, echivalent cu el, se face prin așa-numitele *operații de echivalență*.

Aceste operații, analoge operațiilor cu ajutorul cărora se trece în algebră de la o ecuație la alta echivalentă cu ea (ca de exemplu reducerea termenilor asemenea, trecerea dintr-un membru în altul ș.a), nu schimbă efectul sistemului de forțe.

Operații de echivalență sînt:

— înlocuirea a două forțe concurente prin suma (rezultanta) lor;

— înlocuirea unei forțe prin componentele sale după două direcții date, concurente pe suportul forței date;

— introducerea a două forțe egale și direct opuse;

— suprimarea a două forțe egale și direct opuse;

— lunecarea forțelor aplicate unui solid rigid pe suporturile lor.

Primele patru operații au la bază principiile mecanicii, iar ultima are la bază caracterul de vector alunecător al forței aplicate unui solid rigid.

Aplicînd aceste operații unui sistem de forțe, îl putem transforma într-altul echivalent cu el. Transformarea unui sistem de forțe în cel mai simplu sistem echivalent cu el constituie operația denumită *reducere*. Operația de reducere se efectuează în raport cu un anumit punct din spațiu; ea oferă posibilitatea înlocuirii unui sistem de forțe, oricît de complicat, prin



aşa-numitele *elemente de reducere*, care înlocuiesc în calcule întregul sistem de forţe.

g) **Reducerea unei forţe şi a unui sistem de forţe într-un punct.** Să considerăm o forţă  $\vec{F}$  şi un punct  $O$  din spaţiu; să reducem forţa  $\vec{F}$  în punctul  $O$  (fig. 2.24). Pentru aceasta, în baza celei de-a treia operaţii de echivalenţă, vom introduce în

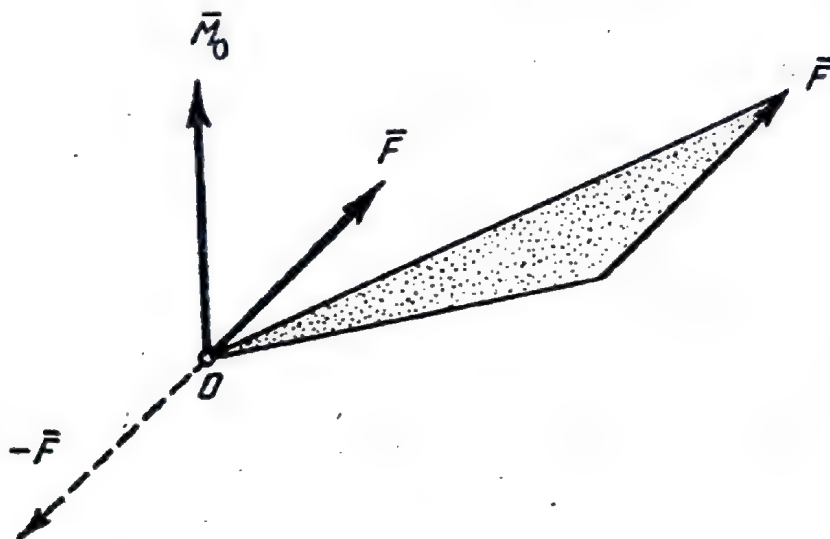


Fig. 2.24.

punctul  $O$  două forţe egale şi direct opuse avînd modulul  $F$ . În locul forţei  $\vec{F}$  vom avea de redus sistemul forţelor,  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}$  şi  $-\vec{F}$  echivalent cu sistemul dat. Forţa dată  $\vec{F}$  împreună cu forţa  $-\vec{F}$  din punctul  $O$  formează un cuplu, al cărui moment este egal cu momentul forţei  $\vec{F}$  în raport cu punctul  $O$ . Vom reprezenta momentul forţei  $\vec{F}$  în raport cu punctul  $O$  prin vectorul  $\vec{M}_O$ , perpendicular pe planul format de forţa dată şi punctul de reducere şi aplicat în  $O$ . În acest fel am obţinut cele două elemente de reducere ale forţei  $\vec{F}$  în punctul  $O$ : forţa  $\vec{F}$  şi cuplul de moment  $\vec{M}_O$ . Se observă uşor că forţa  $\vec{F}$  şi vectorul  $\vec{M}_O$  sînt perpendiculari între ei.

În cazul general, pentru reducerea unui sistem de forţe vom proceda în mod analog pentru fiecare forţă în parte; vor apărea astfel în punctul de reducere un număr de forţe egale, paralele şi de acelaşi sens cu forţele date, concurente în punctul  $O$ , şi un număr de vectori moment, perpendiculari pe planele formate de forţe şi punctul de reducere, de asemenea concurenţi în punctul de reducere. Prin compunerea lor vom obţine un vector *forţă rezultantă* şi un vector *moment resultant*, aplicaţi

în punctul de reducere. Acestea sînt cele două elemente de reducere în cazul cel mai general al unui sistem de vectori.

În cele ce urmează vom calcula elementele de reducere în cazul a diferite sisteme particulare de vectori.

## 5. Reducerea într-un punct a diferitelor sisteme de forțe

a) **Forțe coliniare.** Reducerea într-un punct de pe suportul comun al forțelor.

Să considerăm cazul unui sistem de forțe situate pe o aceeași dreaptă  $\Delta$  (2.25). Să alunecăm toate forțele pe suport pînă ce originile lor se suprapun în punctul de reducere

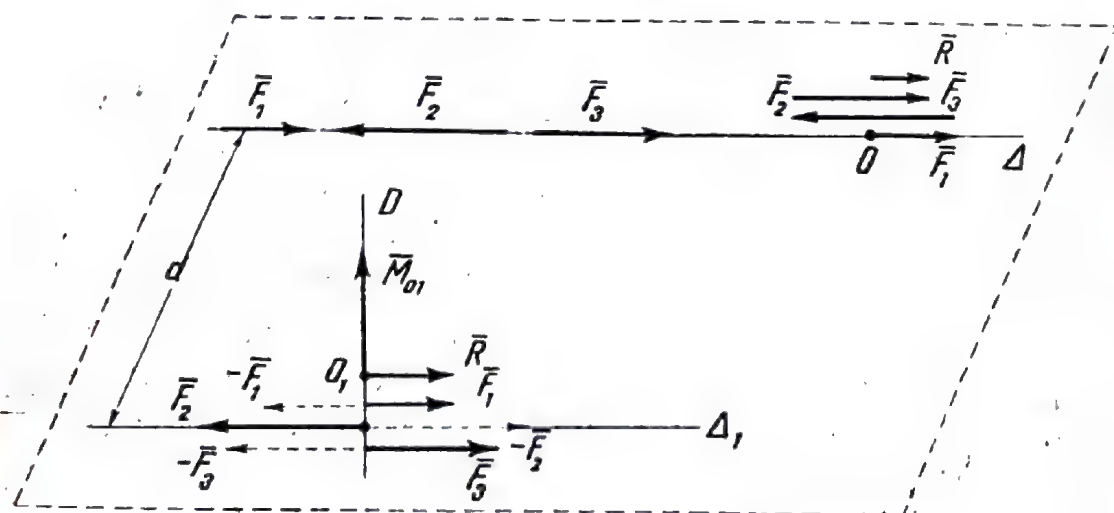


Fig. 2.25.

$O$ ; pentru a le reduce, le vom compune după regula paralelogramului sau, ceea ce e tot una, după regula adunării vectorilor. Procedînd astfel, vom obține ca elemente de reducere o singură forță rezultantă  $\bar{R}$  al cărui suport este chiar suportul comun al forțelor. În acest caz particular, modulul rezultantei se poate calcula foarte simplu, fără a mai face uz de regula paralelogramului, astfel: se alege pe dreapta  $\Delta$  un sens pozitiv și se adună algebric modulele forțelor componente: forțelor dirijate în sensul pozitiv ales li se atribuie semnul plus, iar celor dirijate în sens negativ li se atribuie semnul minus.

**Reducerea într-un punct  $O_1$  din spațiu.** Să alegem acum punctul  $O_1$  de reducere situat undeva în spațiu, în afara dreptei  $\Delta$  și la distanța  $d$  de aceasta. Pentru a reduce sistemul de forțe



dat în punctul  $O_1$ , vom introduce în acest punct două forțe egale și direct opuse pentru fiecare dintre forțele date; vom avea de redus deci, în locul sistemului de trei forțe date, un sistem de nouă forțe. Acest ultim sistem fiind echivalent cu primul, el produce asupra corpului căruia îi este aplicat același efect ca și primul sistem. Forțele acestui sistem le vom compune astfel: vom lua mai întâi forțele  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  de pe suportul  $\Delta$  cu forțele  $-\vec{F}_1, -\vec{F}_2, -\vec{F}_3$  din punctul  $O_1$ ; aceste forțe formează împreună cupluri situate în planul  $P$ , determinat de dreapta  $\Delta$  și punctul  $O_1$ , și avînd respectiv momentele egale cu  $F_1d, F_2d, F_3d$ . Vectorii moment ai acestor cupluri îi vom considera aplicați în punctul de reducere  $O_1$ ; ei sînt toți perpendiculari pe planul  $P$ , deci sînt situați pe o dreaptă comună  $D$ . După compunerea acestor șase forțe, observăm că au mai rămas încă trei forțe care nu sînt altele decît cele trei forțe date, mutate în punctul  $O_1$  pe un nou suport comun  $\Delta_1$ . Am obținut deci ca elemente de reducere trei vectori moment coliniari și trei vectori forță de asemenea coliniari. Compunînd între ei vectorii moment și vectorii forță după regula arătată mai sus, obținem ca elemente de reducere în punctul  $O_1$  un vector forță rezultantă  $R$ , același ca în cazul precedent, și un vector moment resultant  $\vec{M}_{O_1}$ , perpendicular pe planul format de punctul  $O_1$  și dreapta  $\Delta$ . Observăm că prin alegerea unui alt punct de reducere, nesituat pe dreapta  $\Delta$ , vectorul forță rezultantă s-a mutat paralel cu el însuși în punctul  $O_1$  (adică rezultanta nu s-a schimbat), dar a apărut în plus un vector moment resultant egal cu suma momentelor forțelor date, în raport cu punctul de reducere. Vectorii  $\vec{R}$  și  $\vec{M}_{O_1}$  sînt perpendiculari între ei.

b) **Forțe concurente coplanare.** *Reducerea în punctul de concurență.* Prin aplicarea succesivă a regulii paralelogramului, se poate constata ușor că acest sistem de forțe se reduce în punctul de concurență  $O$  la o singură forță rezultantă, al cărei suport se află în planul forțelor (fig. 2.26).

*Reducerea într-un punct  $O_1$  din planul forțelor.* Să alegem punctul de reducere  $O_1$  situat undeva în planul comun  $P$  al forțelor date. Pentru a reduce sistemul de forțe dat în punctul  $O_1$  vom proceda ca în cazul precedent, introducînd în acest punct cîte două forțe egale și direct opuse pentru fiecare dintre forțele date, obținînd astfel un sistem de forțe echivalent cu sistemul dat. Vom compune mai întâi forțele date  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ , cu forțele  $-\vec{F}_1, -\vec{F}_2, -\vec{F}_3$ , aplicate în  $O_1$ . Acestea formează împreună trei cupluri situate în planul forțelor, avînd momentele

$F_1 d_1, F_2 d_2, F_3 d_3$ , unde  $d_1, d_2, d_3$  reprezintă respectiv distanțele de la punctul de reducere  $O_1$  la suporturile forțelor  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ . Vectorii moment ai acestor cupluri sînt situați pe normala  $\Delta$  la planul  $P$ , întrucît cuplurile  $(\vec{F}_1 - \vec{F}_1, \vec{F}_2 - \vec{F}_2, \vec{F}_3 - \vec{F}_3)$  se află în planul  $P$ . Au mai rămas forțele  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  mutate însă în punctul  $O_1$  de reducere. Am obținut deci ca elemente de

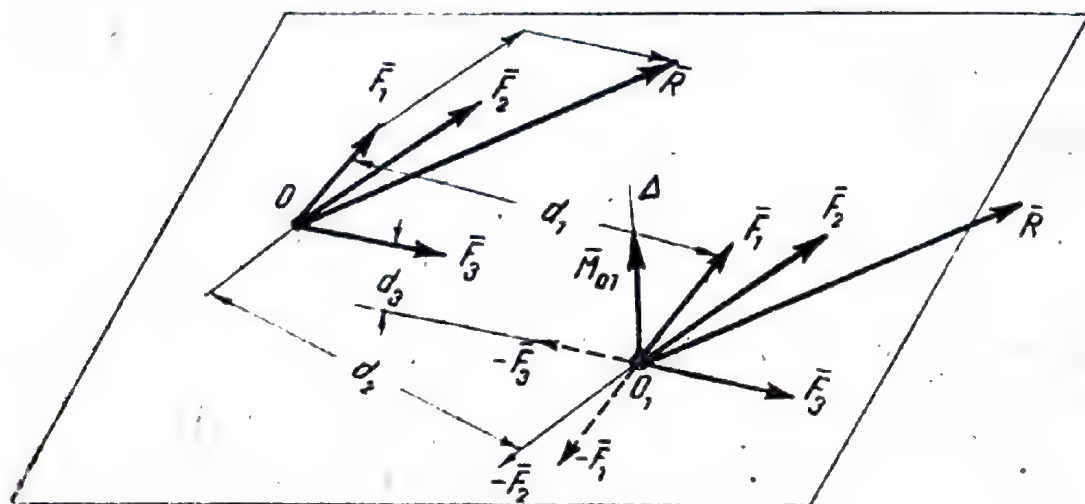


Fig. 2.26.

reducere trei vectori moment coliniari și trei vectori forță concurenți. Compunînd între ei vectorii moment și vectorii forță după regula paralelogramului, obținem ca elemente de reducere în punctul  $O_1$  un vector forță rezultantă  $\vec{R}$ , același ca în cazul precedent, și un vector moment rezultat  $\vec{M}_{O1}$  perpendicular pe planul forțelor și deci și pe rezultanta  $\vec{R}$ . Se observă, la fel ca în cazul precedent, apariția unui vector moment rezultat o dată cu schimbarea punctului de reducere, în timp ce rezultanta rămîne aceeași.

Se poate arăta că alegînd un punct  $O$  situat oricum în spațiu vectorii  $\vec{R}$  și  $\vec{M}_O$  rămîn de asemenea perpendiculari.

c) **Forțe concurente în spațiu.** Reducerea în punctul de concurență (fig. 2.27). Aplicînd succesiv regula paralelogramului, obținem ca singur element de reducere în acest punct o forță rezultantă.

*Reducerea într-un punct  $O$  din spațiu.* Operația de reducere se efectuează la fel ca în cazul precedent, cu deosebirea



că vectorii forță nu mai sînt coplanari. Se obțin ca elemente de reducere un vector forță rezultantă și un vector moment rezultant. Se poate arăta că și în acest caz cele două elemente de reducere, rezultanta și momentul rezultant, sînt perpendiculare unul pe celălalt.

d) **Forțe paralele coplanare.** Reducerea într-un punct  $O$  din planul forțelor (fig. 2.28). Introducînd în punctul de reducere perechi de forțe egale și direct opuse, vom avea de compus în acest punct un număr de vectori forță coliniari și un număr de vectori moment de asemenea coliniari, situați pe normala în punctul  $O$  la planul care conține forțele. Vom obține deci ca elemente de reducere un vector forță rezultantă, avînd direcția paralelă cu direcția comună a forțelor, și un vector moment rezultant, avînd direcția perpendiculară pe planul forțelor.

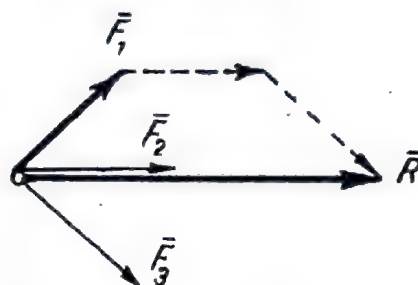


Fig. 2.27.

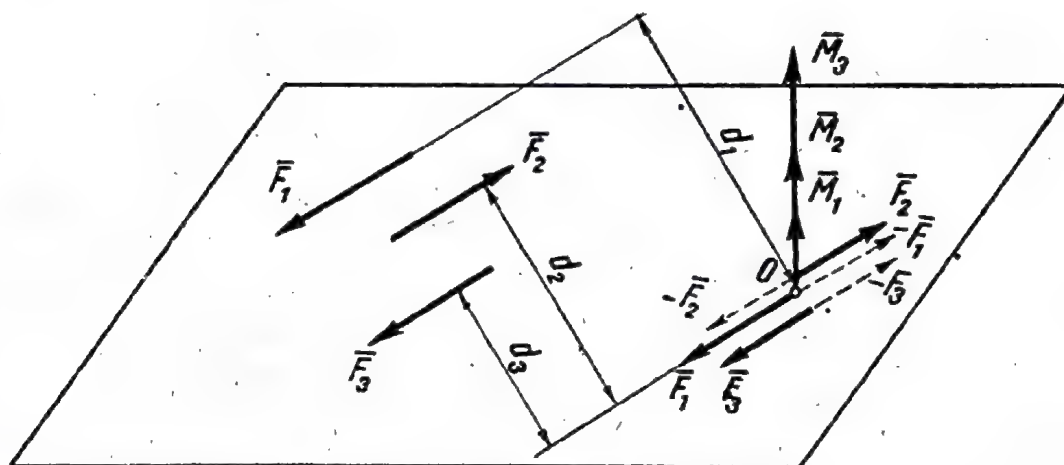


Fig. 2.28.

*Reducerea într-un punct  $O$  din spațiu.* Se poate arăta că în acest caz se obțin ca elemente de reducere aceeași rezultantă și un alt vector moment rezultant care însă este de asemenea perpendicular pe rezultantă.

e) **Forțe coplanare oarecare.** Reducerea într-un punct din planul forțelor. Se obțin ca elemente de reducere un vector forță rezultantă, situată în planul forțelor, și un vector moment rezultant, perpendicular pe planul forțelor (fig. 2.29).

Reducerea într-un punct din spațiu. Se obțin ca elemente de reducere același vector forță rezultantă și un vector moment rezultant perpendicular pe rezultantă.

f) Forțe paralele în spațiu. Reducerea într-un punct  $O$  din spațiu. Introducând în punctul de reducere perechi de forțe

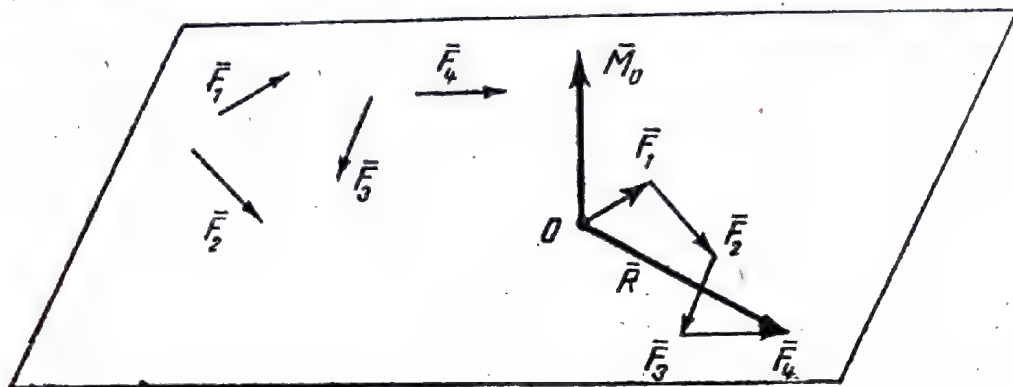


Fig. 2.29.

egale și direct opuse, vom avea de compus în acest punct un număr de vectori forță coliniari și un număr de vectori moment concurenți; se obțin ca elemente de reducere un vector forță

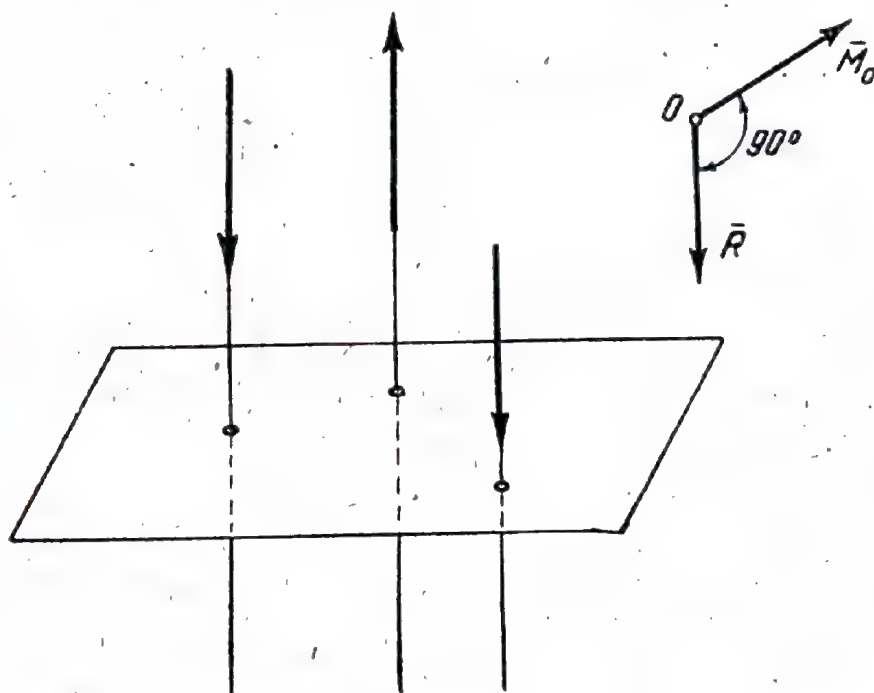


Fig. 2.30.

rezultantă și un vector moment rezultant. Se poate arăta și în acest caz că cele două elemente de reducere, rezultanta și momentul rezultant, sînt perpendiculare unul pe celălalt (fig. 2.30).



g) **Cupluri în plan.** Reducerea într-un punct  $O$  din spațiu (fig. 2.31). Știm că vectorul moment al unui cuplu este perpendicular pe planul cuplului și are punctul de aplicație oriunde în spațiu. Reprezentând toate cuplurile date prin vectorii moment respectivi, vom obține un sistem de vectori moment coliniari. Cum rezultanta fiecărui cuplu în parte este nulă, deducem că vom obține ca element de reducere un singur vector moment rezultat, perpendicular pe planul care conține toate cuplurile.

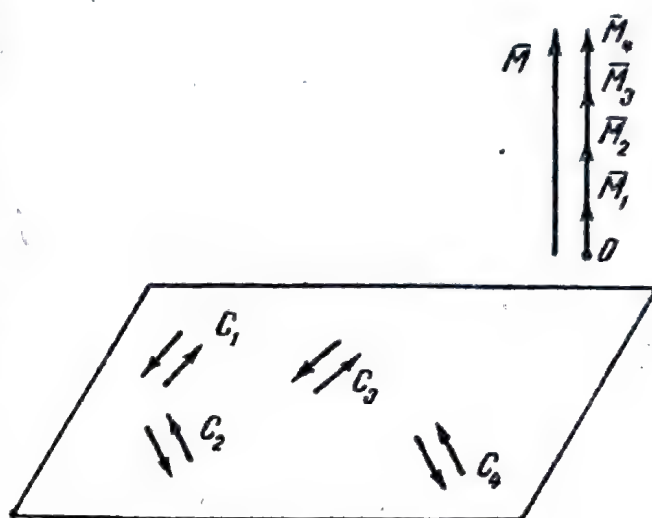


Fig. 2.31.

h) **Cupluri în spațiu.** Reducerea într-un punct  $O$  din spațiu (fig. 2.32). Procedând ca mai sus, obținem ca element de reducere un singur vector moment rezultat, care este rezultanta vectorilor moment ai cuplurilor date, reduși în punctul  $O$ .

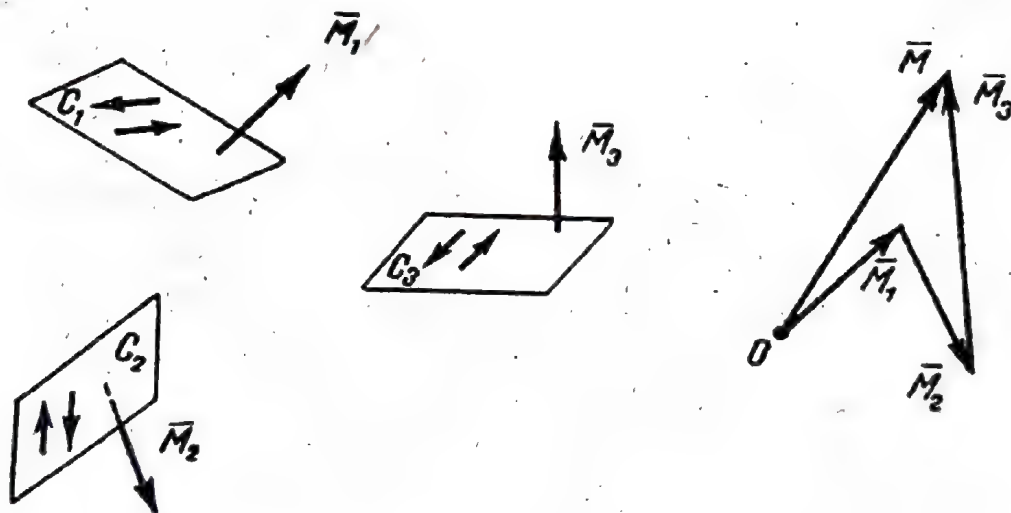


Fig. 2.32.

i) **Forțe și cupluri oarecare în spațiu.** Reducerea într-un punct  $O$  din spațiu. Introducând în punctul de reducere perechi de forțe egale și direct opuse, obținem ca elemente de reducere

în  $O$  un vector forță rezultantă și un vector moment rezultant. Acesta este cazul cel mai general de sistem de forțe întâlnit în mecanică; toate celelalte sisteme de forțe analizate mai sus sînt cazuri particulare ale acestui sistem. Cele două elemente

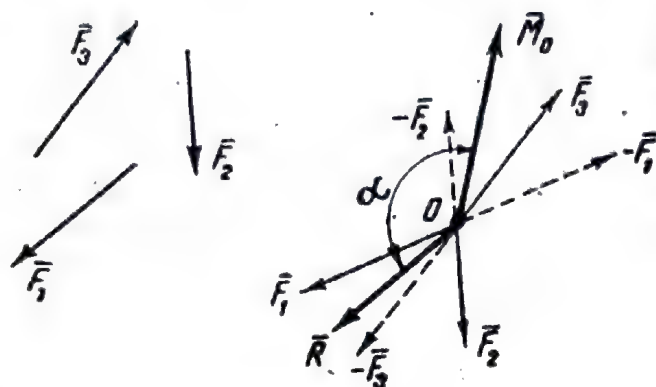


Fig. 2.33.

de reducere, rezultanta și momentul rezultant, fac între ele un unghi oarecare  $\alpha$  (fig. 2.33).

j) Studiarea cazului de reducere  $\bar{R} \perp \bar{M}_O$ ; teorema lui Varignon. Din cele de mai sus se constată că în aproape toate cazurile de sisteme particulare de forțe analizate (concurente, coplanare, paralele) se obțin ca elemente de

reducere un vector forță rezultantă și un vector moment rezultant, perpendiculari unul pe celălalt. Vom arăta acum că în acest caz se pot găsi anumite puncte din spațiu în care avem ca element de reducere doar rezultanta sistemului respectiv de forțe, rezultantă care, după modul cum a fost determinată, se observă că este mereu aceeași, indiferent care ar fi punctul în care se face reducerea.

Pentru aceasta, să considerăm cele două elemente de reducere, rezultanta  $\bar{R}$  și momentul rezultant  $\bar{M}_O$ , perpendiculare între ele și să ducem prin vectorul

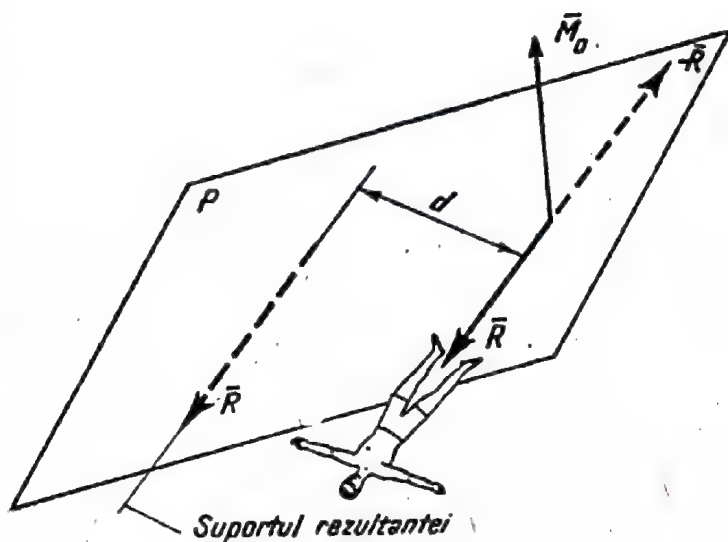


Fig. 2.34.

rezultantă un plan  $P$  perpendicular pe vectorul moment rezultant (fig. 2.34). În acest plan, vom reprezenta cele două forțe care alcătuiesc cuplul al cărui moment este  $\bar{M}_O$  astfel încît una dintre forțe să fie situată pe suportul lui  $\bar{R}$ , egală și direct opusă



acesteia. Cealaltă forță a cuplului se va afla la distanța  $d$  de suportul rezultantei  $R$  dată de relația :

$$d = \frac{M_0}{R} \quad (2.12)$$

Valoarea ei este egală cu aceea a rezultantei  $R$  și ea este situată totdeauna la stînga unui observator care ar sta cu capul spre sensul pozitiv al rezultantei și s-ar uita la sensul pozitiv al vectorului moment  $M_0$ .

Putem spune deci că *toate sistemele de forțe care se reduc într-un punct oarecare din spațiu la un vector rezultantă și un vector moment rezultant, perpendiculari unul pe celălalt, se pot reduce încă numai la o singură rezultantă*. În această situație se află toate sistemele de forțe examinate mai sus, cu excepția sistemelor de cupluri în plan și spațiu și a sistemelor de forțe oarecare în spațiu.

Formula (2.12) se mai poate scrie și sub forma :

$$M_0 = Rd. \quad (2.13)$$

$M_0$  reprezintă momentul rezultant al sistemului de forțe în raport cu punctul în care s-a făcut reducerea ; el este egal cu suma momentelor forțelor componente în raport cu acest punct. Din relația (2.13) rezultă că el mai este egal și cu momentul rezultantei în raport cu același punct.

Pentru toate sistemele de forțe la care, efectuînd reducerea într-un punct, se obțin ca elemente de reducere doi vectori perpendiculari (rezultanta și momentul rezultant), putem enunța deci două teoreme :

— toate aceste sisteme se reduc la o rezultantă unică, care se consideră determinată atunci-cînd i se cunosc mărimea, orientarea și suportul în lungul căruia acționează ;

— pentru toate aceste sisteme, o dată determinată rezultanta, suma momentelor tuturor forțelor sistemului în raport cu un punct oarecare din spațiu (momentul rezultant) este egală cu momentul rezultantei în raport cu același punct.

Ultima teoremă este cunoscută sub denumirea de *teorema lui Varignon* și are multe aplicații practice.

## 6. Metode generale pentru reducerea sistemelor de forțe

În cele de mai sus am întrebuințat pentru reducerea sistemelor de forțe metoda vectorială. Această metodă este foarte sugestivă, însă nu poate fi aplicată întotdeauna în practică la rezolvarea problemelor privind reducerea diferitelor sisteme de forțe. De aceea, vom prezenta în continuare două metode practice pentru rezolvarea acestor probleme.

a) **Metoda analitică.** După cum am văzut mai sus, atunci când efectuăm reducerea unui sistem de forțe obținem în punctul de reducere fie două sisteme de vectori forțe sau cupluri coliniari, fie două sisteme de vectori forțe sau cupluri concurenți. Adunarea acestor vectori în punctul de reducere se face după regula paralelogramului.

Să introducem acum în punctul de reducere  $O$  un sistem de trei axe triortogonal  $Oxyz$  și să proiectăm pe aceste axe vectorii din punctul de reducere; în baza teoremei proiecțiilor, proiecția vectorului forță resultantă pe fiecare dintre axe este egală cu suma proiecțiilor forțelor componente și de asemenea proiecția vectorului moment resultant pe fiecare dintre axe este egală cu suma proiecțiilor momentelor componente; aceasta se scrie astfel:

$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} \\ R_z &= F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} \\ M_x &= M_{1x} + M_{2x} + \dots + M_{nx} \\ M_y &= M_{1y} + M_{2y} + \dots + M_{ny} \\ M_z &= M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Aceste expresii se mai notează uneori pentru prescurtare cu  $\Sigma F_{ix}$  etc. semnul  $\Sigma$  însemnând suma termenilor, în care indicele  $i$  primește succesiv valorile  $1, 2, \dots, n$ .

Cu ajutorul acestor formule putem afla elementele de reducere ale oricărui sistem de forțe în raport cu un punct oarecare din spațiu; pentru aceasta, vom calcula proiecția fiecărei forțe pe fiecare dintre axele sistemului și momentul fiecăreia dintre forțe în raport cu fiecare dintre axele sistemului, după care le vom însuma. Cu ajutorul lor putem determina complet vectorii  $\vec{R}$  și  $\vec{M}_O$  astfel:



— modulul vectorilor  $\bar{R}$  și  $\bar{M}_O$  este egal cu lungimea diagonalei paralelipipedului construit pe proiecțiile vectorilor ;  
deci :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (2.15)$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (2.16)$$

Unghiurile formate de fiecare dintre vectorii  $\bar{R}$  și  $\bar{M}_O$  cu axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  se determină din triunghiurile dreptunghice care au ca ipotenuză pe  $\bar{R}$  (respectiv  $\bar{M}_O$ ), iar una dintre catete este cîte o proiecție  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ , (respectiv  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) (fig. 2.35).

Notînd cu  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  unghiurile formate respectiv cu axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  avem :

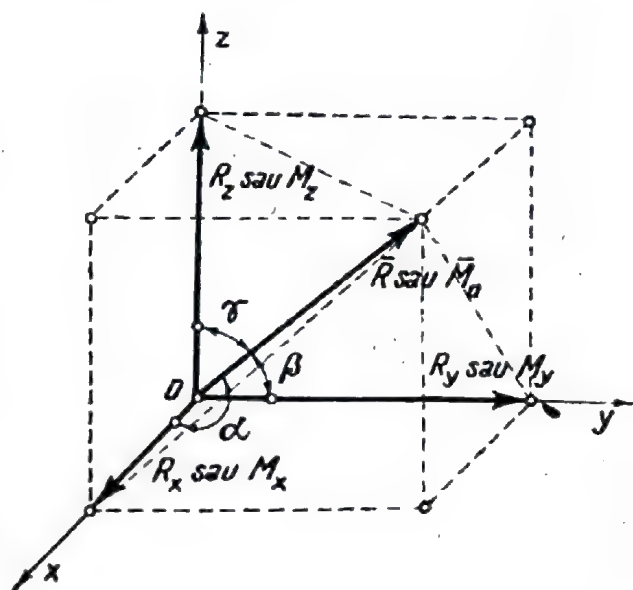


Fig. 2.35.

$$\text{Pentru rezultanta } \bar{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{R_x}{R} \\ \cos \beta = \frac{R_y}{R} \\ \cos \gamma = \frac{R_z}{R} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

$$\text{Pentru momentul rezultat } \bar{M}_O \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{M_x}{M_O} \\ \cos \beta = \frac{M_y}{M_O} \\ \cos \gamma = \frac{M_z}{M_O} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

b) **Indicații metodice privind reducerea pe cale analitică a sistemelor de forțe.** Din punct de vedere practic, pentru reducerea unui sistem de forțe într-un punct la forma cea mai simplă,

adică la un singur vector forță rezultantă și un singur vector moment rezultant, se procedează astfel :

— se alege un sistem de referință avînd originea în punctul de reducere ;

— se calculează proiecția fiecărei forțe pe axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  ale sistemului  $Oxyz$  și apoi se însumează toate proiecțiile de pe axa  $Ox$ , respectiv de pe axa  $Oy$  și apoi de pe axa  $Oz$  ;

— se calculează momentul fiecărei forțe în raport cu axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  și se însumează toate momentele în raport cu axa  $Ox$ , apoi în raport cu axa  $Oy$  și apoi în raport cu axa  $Oz$  ;

— se calculează modulul rezultantei și al momentului rezultant cu formulele (2.15) și (2.16) ;

— se calculează unghiurile făcute de vectorul forță rezultantă și momentul rezultant cu axele de coordonate cu formulele (2.17) și (2.18) ;

— se figurează cei doi vectori  $\bar{R}$  și  $\bar{M}_O$  ;

— dacă  $\bar{R} \perp \bar{M}_O$  se determină suportul rezultantei cu formula (2.12).

Pentru sistematizare, calculele privind reducerea unui sistem de forțe într-un punct se trec în tabelele 2.1 și 2.2.

Tabela 2.1

Proiecțiile forțelor și momentelor în raport cu axe

Forța	$F_x$	$F_y$	$F_z$	$M_x$	$M_y$	$M_z$
$F_1$						
$F_2$						
$\vdots$						
Suma $\rightarrow$						

### c) Metoda grafică.

La rezolvarea multor probleme de statică se pot aplica procedee grafice. Ele prezintă avantajul față de procedeele analitice că permit ca într-o singură figură să se poată cuprinde întreaga problemă în ansamblul ei, iar rezultatele obținute să fie sugestive, ușurînd găsirea greșelilor care eventual s-ar strecura.

Calculul analitic nu prezintă acest avantaj, rezolvarea problemei se desfășoară fără a fi sugestivă, dar, în schimb, permite obținerea unui rezultat cu o exactitate cît de mare dorim.

Datorită ușurinței de aplicare în rezolvarea unor probleme de statică, într-o serie de cazuri practice, procedeele grafice sînt mai avantajoase decît cele analitice. De aceea ele sînt foarte



folositoare, în special atunci când trebuie să studiem mai multe variante spre a alege pe cea mai avantajoasă.

În cele ce urmează vom descrie câteva procedee grafice mai importante, folosite la rezolvarea problemelor de reducere a sistemelor de forțe.

*Compunerea forțelor concurente, poligonul forțelor* (fig. 2.36). După câte am văzut mai sus, un sistem de forțe concurente se reduce în punctul de concurență la o singură rezultantă. Obținerea acestei rezul-

tante se face aplicând din aproape în aproape regula paralelogramului. Astfel, compunând între ele forțele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  obținem rezultanta  $\vec{R}_2$ , care la rândul său compusă cu forța  $\vec{F}_3$  ne dă rezultanta  $\vec{R}_3$  ș.a.m.d. (fig. 2.36, a). Rezultanta  $\vec{R}$  se mai poate obține și astfel: se duc dintr-un punct arbitrar,  $a$ , vectori echivalenți cu vectorii dați, astfel încât originea fiecăruia dintre ei să coincidă cu extremitatea celui dinaintea sa (fig. 2.36, b); linia de închidere a poligonului astfel obținut este rezultanta sistemului considerat.

Dacă punctele  $a$  și  $n$  coincid, atunci rezultanta este nulă și sistemul forțelor se află în echilibru.

*Descompunerea unei forțe după două direcții date* (fig. 2.37, a). Fie  $\vec{F}$  forța dată și  $\Delta_1, \Delta_2$  cele două direcții. Pentru a o descompune în componentele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ , ducem prin punctul său de aplicație două paralele  $OA$  și  $OB$  la direcțiile  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$  (fig. 2.37, b). Alte două paralele la aceleași direcții duse prin vârful forței  $\vec{F}$  determină pe direcțiile  $OA$  și  $OB$  vîrfurile 1 și 2 ale celor două componente  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ .

Tabela 2.2

Elemente de reducere

Mărimea	Rezultanta	Momentul rezultat
Proiecția pe $Ox$		
Proiecția pe $Oy$		
Proiecția pe $Oz$		
Modulul		
$\cos \alpha$		
$\cos \beta$		
$\cos \gamma$		

Descompunerea unei forțe după trei direcții coplanare necurente cu forța (fig. 2.38, a). Fie  $\vec{F}$  forța dată și  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  cele trei direcții. Pentru a descompune forța  $\vec{F}$  după cele trei

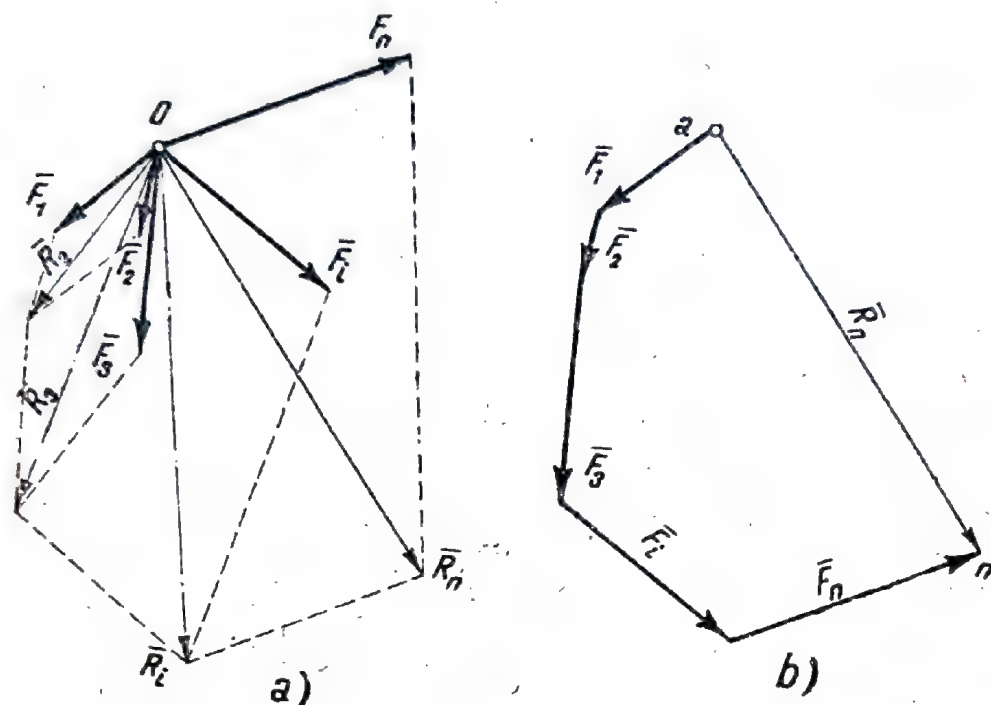


Fig. 2.36.

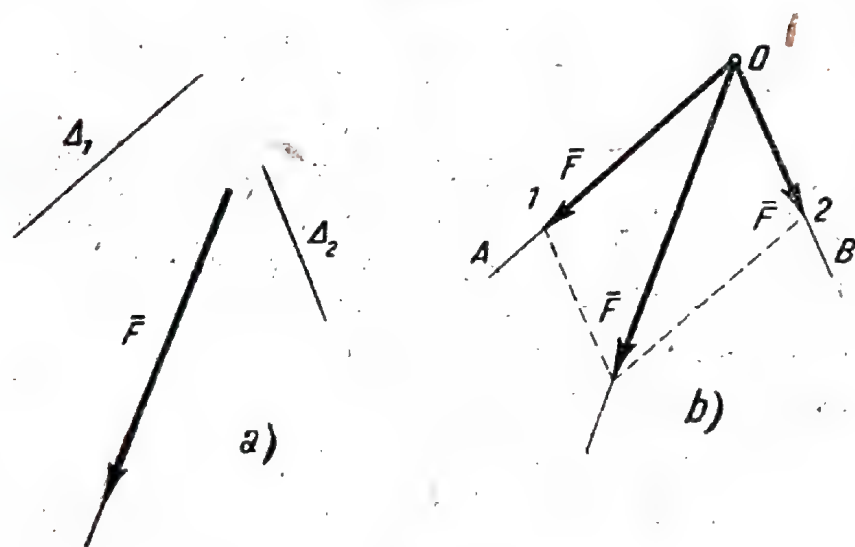


Fig. 2.37.

direcții date, intersectăm suportul său cu una dintre direcții, de exemplu cu direcția  $\Delta_1$ , în punctul  $a$  și apoi unim acest punct cu punctul  $b$  de intersecție a celorlalte două direcții, obținând astfel direcția ajutătoare  $\Delta$  (fig. 2.38, b). Alunecăm apoi forța



$\vec{F}$  pe suport pînă cînd punctul său de aplicație coincide cu punctul  $a$  și o descompunem după direcțiile  $\Delta_1$  și  $\Delta$  obținînd componentele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_\Delta$ . Componenta  $\vec{F}_\Delta$  o deplasăm pe suportul

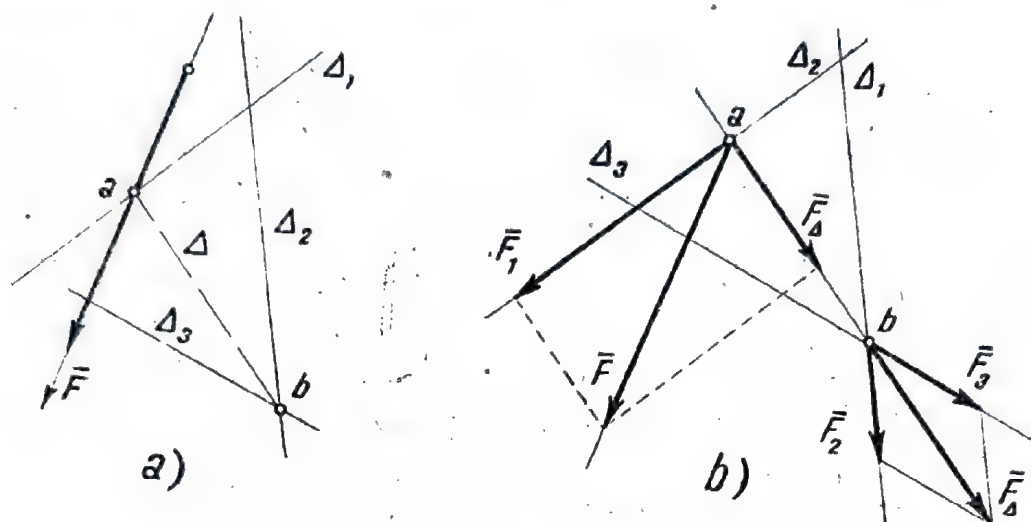


Fig. 2.38.

său pînă ce punctul său de aplicație ajunge în  $b$  și o descompunem după direcțiile  $\Delta_2$  și  $\Delta_3$  în componentele  $\vec{F}_2$  și  $\vec{F}_3$ . Componentele  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ , și  $\vec{F}_3$  sînt cele căutate.

*Reducerea sistemelor de forțe coplanare; poligonul funicular.*  
Pentru reducerea sistemelor de forțe coplanare, s-ar putea proceda ca și în cazul forțelor concurente, alunecînd vectorii pe suporturile lor și compunîndu-i doi cîte doi, dar acest procedeu este greoi și incomod. De aceea, în practică se folosește o altă metodă, mai expeditivă, denumită *metoda poligonului funicular*.

Să considerăm un sistem de forțe coplanare, spre exemplu sistemul format de cele patru forțe  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  și  $\vec{F}_4$  din figura 2.39, a. Construim pentru acest sistem de forțe poligonul forțelor  $abcde$  (fig. 2.39, b).

Dacă poligonul forțelor se va închide, există două posibilități: sau sistemul este în echilibru, sau se reduce la un

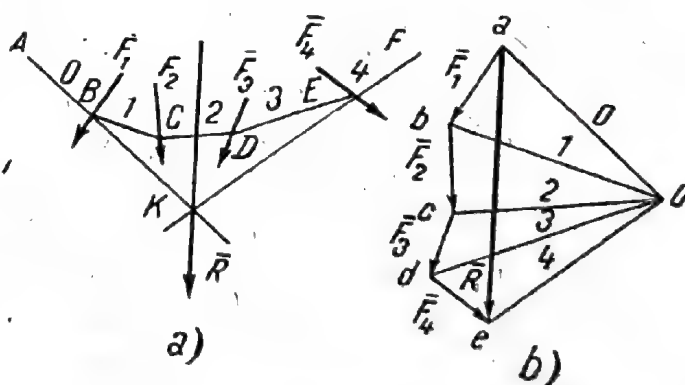


Fig. 2.39.

cuplu; astfel, închiderea poligonului forțelor este o condiție de echilibru necesară, dar nu și suficientă. Dacă însă poligonul forțelor este deschis, atunci sistemul de forțe se reduce numai la o rezultantă, așa cum se întâmplă în cazul din figura 2.39 unde dreapta de închidere  $ae$  a liniei frânțe  $abcde$  dă mărimea, direcția și sensul rezultantei. Pentru a cunoaște complet rezultanta  $\bar{R}$ , este necesar să-i găsim un punct prin care trece suportul său.

Pentru rezolvarea acestei ultime probleme, vom lua un punct oarecare  $O$  din plan pe care-l vom numi *pol* și pe care-l vom uni cu vîrfurile  $a, b, c, d, e$  prin niște drepte pe care le vom numi *raze polare*. Luăm acum un punct arbitrar  $A$  al planului și ducem prin el dreapta  $AB$ , paralelă cu raza polară  $O$ , pînă în punctul  $B$  unde această dreaptă intersectează suportul forței  $\bar{F}_1$ ; prin punctul  $B$  ducem dreapta  $BC$ , paralelă cu raza polară  $I$ , pînă în punctul  $C$  unde ea intersectează suportul forței  $\bar{F}_2$  ș.a.m.d. Prin punctul  $E$  vom duce dreapta  $EF$  paralelă la raza polară  $4$ . Astfel vom obține linia poligonală  $ABCDEF$ , pe care o vom denumi poligon funicular. Folosindu-ne de construcția razelor din poligonul forțelor, forța  $\bar{F}_1$  se poate descompune în două forțe  $O$  și  $I$ , paralele și egale cu aceste raze. Forța

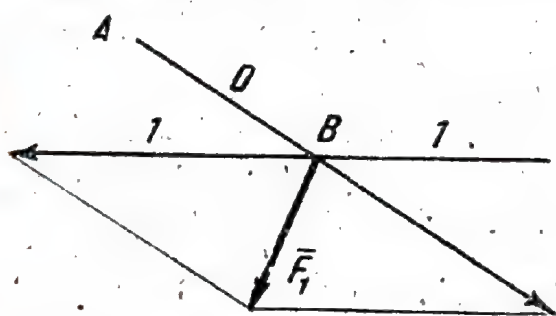


Fig. 2.40.

$O$  este dirijată înspre punctul  $O$ , iar forța  $I$  dinspre punctul  $O$ . Mutînd aceste forțe în punctul  $B$  vom observa că de fapt am efectuat descompunerea forței  $\bar{F}_1$  în două forțe paralele cu razele  $O$  și  $I$  după legea paralelogramului (fig. 2.40). Tot astfel forța  $\bar{F}_2$  poate fi descompusă în două forțe,  $I$  și  $2$ , dintre care

prima este dirijată înspre punctul  $O$ , iar a doua dinspre punctul  $O$ . Mutînd aceste forțe în poligonul funicular vedem că de-a lungul laturii sale  $I$  se vor așeza două forțe egale cu raza polară  $I$ , dar dirijate în sensuri opuse. Continuînd această construcție vom găsi că sistemul de forțe date  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$  se poate înlocui cu forțe care merg de-a lungul laturilor poligonului funicular. De-a lungul fiecărei laturi intermediare  $1, 2$  și  $3$  sînt dirijate



cîte două forțe egale și direct opuse, care se echilibrează între ele. Rămîn neechilibrate numai cele două forțe extreme  $O$  și  $4$ , egale cu razele polare  $O$  și  $4$ . Astfel, sistemul celor patru forțe date s-a redus numai la două forțe concurente  $O$  și  $4$ . Prelungind suporturile lor vom obține punctul  $K$  prin care trebuie să treacă rezultanta lor  $\bar{R}$ . Cum direcția și mărimea acestei rezultan-

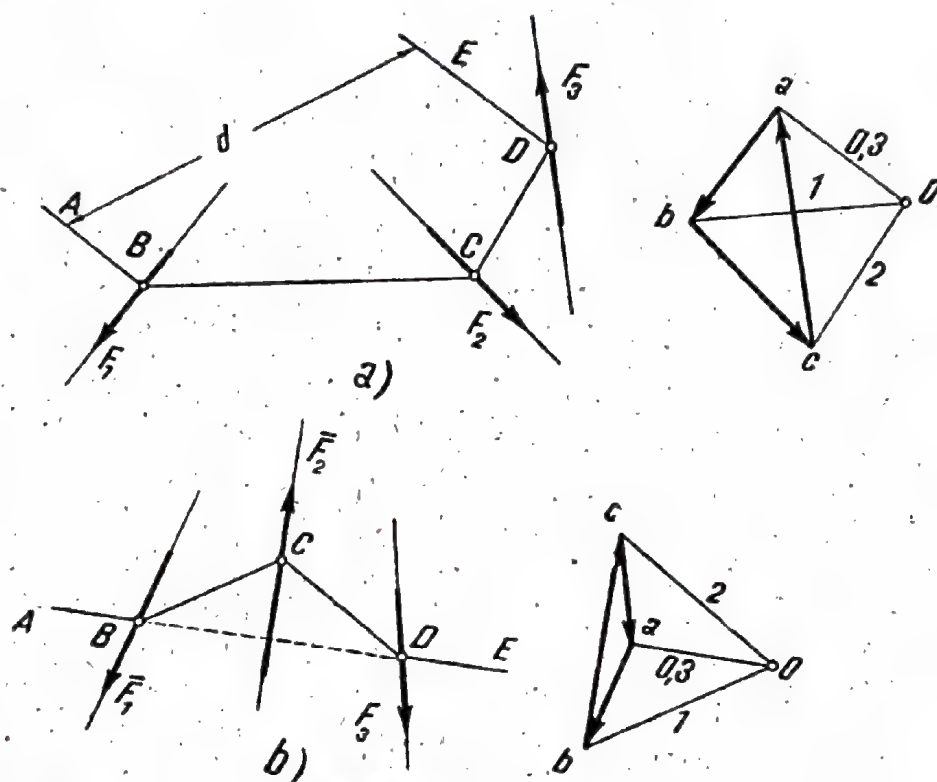


Fig. 2.41.

te sînt cunoscute din poligonul forțelor, ducem prin punctul  $K$  un vector echipolent cu vectorul  $ae$  și problema este complet rezolvată.

În cazul în care segmentul  $ae$  este nul, pot apărea două situații:

- poligonul funicular  $ABCDE$  are prima latură  $AB$  și ultima latură  $DE$  paralele (fig. 2.41,  $a$ ); sistemul se reduce la un cuplu, al cărui moment este egal cu produsul dintre lungimea laturii  $O$  (sau  $3$ ) cu distanța  $d$  dintre aceste două laturi;
- prima latură  $AB$  și ultima latură  $DE$  a poligonului funicular coincid (fig. 2.41,  $b$ ); sistemul se află în echilibru.

## 7. Reducerea sistemelor de forțe paralele considerate ca vectori legați

a) **Calculul analitic al elementelor de reducere.** Să presupunem că avem un sistem de forțe paralele compus din forțele:  $\vec{F}_1$ , aplicată în  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{F}_2$ , aplicată în  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ , ...,  $F_n$  aplicată în  $A_n(x_n, y_n, z_n)$ . Forțele sînt toate paralele cu direcția  $\Delta$  care face cu axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  respectiv unghiurile  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ele putînd fi îndreptate într-un sens sau în celălalt pe această direcție (fig. 2.42).

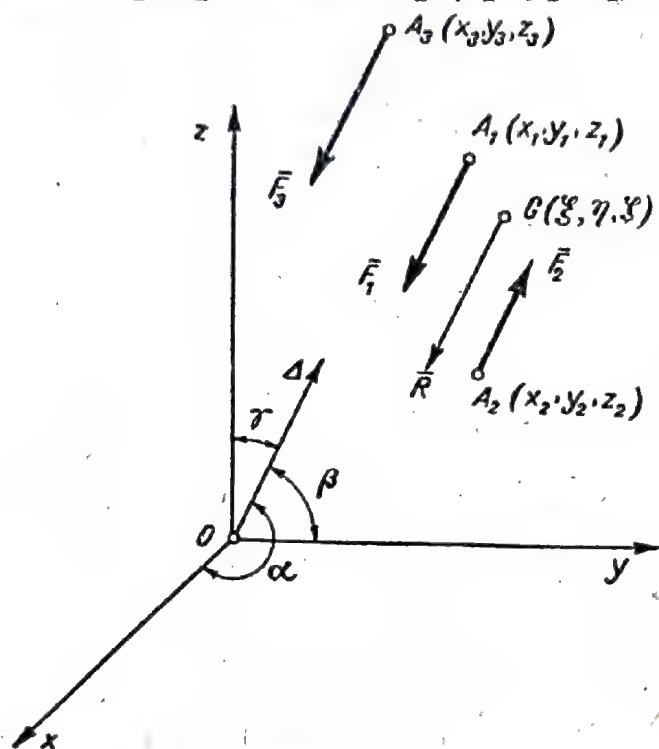


Fig. 2.42.

Vom calcula cu ajutorul formulelor (2.14) elementele de reducere ale acestui sistem în originea  $O$  a axelor de coordonate. Avem pentru rezultantă :

$$\begin{aligned} R_x &= F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \alpha + \dots + F_n \cos \alpha = \\ &= \cos \alpha (F_1 + F_2 + \dots + F_n), \\ R_y &= F_1 \cos \beta + F_2 \cos \beta + \dots + F_n \cos \beta = \\ &= \cos \beta (F_1 + F_2 + \dots + F_n), \\ R_z &= F_1 \cos \gamma + F_2 \cos \gamma + \dots + F_n \cos \gamma = \\ &= \cos \gamma (F_1 + F_2 + \dots + F_n). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Suma din paranteză reprezintă suma modulelor forțelor, luate cu semnul  $+$  dacă ele sînt îndreptate în sensul pozitiv de pe axa  $\Delta$ , sau cu semnul  $-$  dacă ele sînt îndreptate în sens negativ.

Modulul rezultantei este :

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = (F_1 + F_2 + \dots + F_n) \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = \\ &= F_1 + F_2 + \dots + F_n, \end{aligned} \quad (2.20)$$



deoarece oricare ar fi unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$  făcute de o dreaptă în spațiu cu axele  $Ox, Oy, Oz$  avem totdeauna :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Din formulele (2.19) rezultă :

$$\begin{aligned} R_x &= R \cos \alpha, \\ R_y &= R \cos \beta, \\ R_z &= R \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Aceste relații ne arată că rezultanta este paralelă cu direcția comună a forțelor, deoarece ea face cu axele aceleași unghiuri  $\alpha, \beta, \gamma$  pe care le face și dreapta  $\Delta$ .

Pentru calculul momentului rezultat aplicăm formulele (2.10); pentru una dintre forțe, spre exemplu pentru forța  $\bar{F}_1$ , avem :

$$\begin{aligned} M_{1x} &= y_1 F_{1z} - z_1 F_{1y} = F_1 (y_1 \cos \gamma - z_1 \cos \beta), \\ M_{1y} &= z_1 F_{1x} - x_1 F_{1z} = F_1 (z_1 \cos \alpha - x_1 \cos \gamma), \\ M_{1z} &= x_1 F_{1y} - y_1 F_{1x} = F_1 (x_1 \cos \beta - y_1 \cos \alpha). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Scriind expresiile momentelor tuturor forțelor și însumînd rezultatele, obținem :

$$\begin{aligned} M_x &= \cos \gamma (F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n) - \\ &\quad - \cos \beta (F_1 z_1 + F_2 z_2 + \dots + F_n z_n), \\ M_y &= \cos \alpha (F_1 z_1 + F_2 z_2 + \dots + F_n z_n) - \\ &\quad - \cos \gamma (F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n), \\ M_z &= \cos \beta (F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n) - \\ &\quad - \cos \alpha (F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n). \end{aligned} \quad (2.23)$$

b) **Centrul forțelor paralele.** Să presupunem că rezultanta este aplicată într-un punct  $G(\xi, \eta, \zeta)$ ; ne propunem să aflăm coordonatele acestui punct ca funcții de datele noastre : modulele forțelor, coordonatele punctelor lor de aplicație și unghiurile lor  $\alpha, \beta, \gamma$  cu axele de coordonate. Pentru aceasta, vom aplica teorema lui Varignon în raport cu una dintre axele sistemului  $Oxyz$ , spre exemplu în raport cu axa  $Ox$ . Momentul rezultantei în raport cu această axă este după prima formulă (2.10) :

$$M_x = \eta R_z - \zeta R_y.$$

Înlocuind valorile lui  $R_y$  și  $R_z$  după formulele (2.19) obținem :

$$M_x^r = \eta \cos \gamma (F_1 + F_2 + \dots + F_n) - \zeta \cos \beta (F_1 + F_2 + \dots + F_n).$$

Dar suma momentelor forțelor sistemului în raport cu axa  $Ox$  este proiecția momentului rezultat pe această axă. Aceasta înseamnă că va trebui să egalăm valoarea lui  $M_x$  (momentul rezultantei) cu aceea calculată după prima formulă (2.23) ; obținem ecuația :

$$\begin{aligned} \cos \gamma (F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n) - \cos \beta (F_1 z_1 + F_2 z_2 + \dots + F_n z_n) = \\ = \eta \cos \gamma (F_1 + F_2 + \dots + F_n) - \zeta \cos \beta (F_1 + F_2 + \dots + F_n). \end{aligned}$$

Această ecuație care conține două necunoscute ( $\eta$  și  $\zeta$ ) este verificată de soluțiile :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}, \\ \zeta &= \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2 + \dots + F_n z_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ne putem convinge ușor luând numai două forțe  $F_1$  și  $F_2$ , pentru care avem :

$$\begin{aligned} \cos \gamma (F_1 y_1 + F_2 y_2) - \cos \beta (F_1 z_1 + F_2 z_2) = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} \cos \gamma (F_1 + F_2) - \\ - \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2}{F_1 + F_2} \cos \beta (F_1 + F_2). \end{aligned}$$

Efectuînd reducerile se obține o identitate.

În mod analog, utilizînd ecuația de momente în raport cu axa  $Oy$ , se obține și

$$\xi = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}. \quad (2.25)$$

Punctul  $G(\xi, \eta, \zeta)$ , ale cărui coordonate sînt date de formulele (2.24) și (2.25) se numește *centrul forțelor paralele*. El se bucură de următoarele două proprietăți :

— *poziția sa este independentă de direcția comună a forțelor paralele*, deoarece formulele (2.24) și (2.25) nu conțin unghiurile  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ; aceasta înseamnă că dacă rotim toate forțele în jurul punctelor lor de aplicație în același sens și cu același unghi, poziția centrului forțelor paralele nu se schimbă, iar



rezultanta  $R$  se va roti și ea o dată cu forțele în jurul aceluiași punct ;

— dacă toate forțele devin de un același număr de ori mai mari, adică spre exemplu, dacă forța  $F_1$  devine  $3F_1$ , forța  $F_2$  devine  $3F_2$  ș.a.m.d., poziția centrului forțelor paralele de asemenea nu se modifică, deoarece factorul comun care multiplică valoarea forțelor apare atât la numărător cît și la numitor și se simplifică.

Centrul forțelor paralele joacă un rol foarte important atunci cînd forțele paralele sînt greutatea ale particulelor materiale care compun un corp ; în acest caz el se numește *centrul de greutate*.

c) Forțele de greutate ale particulelor componente ale unui corp considerate ca un sistem de forțe paralele. Se știe că sub acțiunea forței de atracție universală, numită și *forța gravitației*, fiecare particulă materială aflată pe suprafața Pămîntului este atrasă de Pămînt, iar forța de gravitație este dirijată către centrul Pămîntului. Pentru un anumit corp, forțele de gravitație ale particulelor sale formează un sistem de forțe concurente în centrul Pămîntului ; totuși, fără a comite o eroare prea mare, vom putea considera aceste forțe ca un sistem de forțe paralele, fapt care ușurează mult calculul punctului de aplicație al rezultantei acestor forțe.

Pentru a evalua ordinul de mărime al erorii comise, să examinăm două direcții ale forței de gravitație, care formează între ele un unghi de  $90^\circ$  corespunzînd deci cu direcțiile forțelor de atracție de la pol și de la ecuator. Pentru a trece de la pol la ecuator, va trebui să ne deplasăm cu un sfert din meridianul pămîntesc, adică cu 10 000 000 m. Pentru ca unghiul dintre două drepte să fie egal cu o secundă de grad, va trebui să ne deplasăm cu :

$$\frac{10\,000\,000}{90 \times 60 \times 60} = 30,9 \text{ m}$$

Aceasta înseamnă că forțele de gravitație a două particule situate la extremitățile unui corp avînd lungimea de 30,9 m fac între ele un unghi de o secundă. De aici rezultă că, cu o aproximație foarte bună, forțele de atracție ale corpurilor cu dimensiuni mici situate la suprafața Pămîntului se pot considera paralele între ele.

Fie dat un corp material ; să despărțim acest corp în particule foarte mici. Fiecare particulă a corpului este atrasă de Pămînt ; sistemul forțelor de atracție ale tuturor particulelor

poate fi considerat ca un sistem de forțe paralele în plan sau în spațiu.

Rezultanta forțelor paralele care constituie greutatea tuturor particulelor unui corp material este *greutatea* acestui corp, iar centrul acestor forțe paralele este centrul de greutate al corpului respectiv. El este un punct geometric, care nu trebuie confundat cu vreo particulă a corpului.

d) **Formulele pentru determinarea centrului de greutate la corpuri oarecare.** După cum am arătat mai sus, centrul forțelor paralele nu-și schimbă poziția în spațiu atunci când rotim toate forțele de același unghi în jurul punctelor lor de aplicație rămase fixe. Pe această observație se întemeiază metoda de determinare experimentală a centrului de greutate prin atârănare în diferite puncte ale sale. Prin rotirea corpului față de Pământ, centrul de greutate păstrează o poziție bine determinată față de corp.

Pentru determinarea sa pe cale analitică, vom aplica formulele (2.24) și (2.25) în care forțele  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sînt acum greutatea  $G_1, G_2, \dots, G_n$  ale particulelor care alcătuiesc corpul:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2 + \dots + G_n x_n}{G_1 + G_2 + G_n} = \frac{g(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n)}{g(m_1 + m_2 + \dots + m_n)} = \\ &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M}, \\ \eta &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{M}, \\ \zeta &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{M},\end{aligned}\quad (2.26)$$

unde  $m_1, m_2, \dots, m_n$  sînt masele particulelor și  $M$  masa totală a corpului, egală cu suma acestor mase ale particulelor.

Aplicarea practică a acestor formule este dificilă, deoarece numărul particulelor unui corp este infinit de mare, iar sumele de la numărător devin integrale. Dacă am reuși să împărțim corpul într-un număr finit de părți, ale căror greutăți și poziții ale centrelor de greutate să ne fie cunoscute, am putea calcula cu ușurință sumele de la numărătorii expresiilor (2.26), dacă acest număr de părți nu va fi prea mare.

e) **Formulele pentru determinarea centrului de greutate la corpuri omogene.** Vom înțelege prin corpuri omogene acele corpuri la care materia este astfel repartizată încît greutatea specifică (greutatea unității de volum) este aceeași în orice punct al



corpului. În general, corpurile din tehnică nu sînt, riguros vorbind, corpuri omogene, deoarece ele nu au exact aceeași compoziție în toate punctele sau conțin o serie de incluziuni sau de goluri. Cu toate acestea, datorită faptului că abaterea greutății specifice a corpurilor de la o valoare medie este totuși mică, vom considera corpurile întîlnite în tehnică drept corpuri omogene.

În cazul acestor corpuri formulele (2.26) se simplifică; într-adevăr dacă notăm cu  $\gamma$  greutatea specifică a corpului și cu  $V$  volumul unei particule a corpului, greutatea acestei particule se exprimă prin relația  $G = \gamma V$  ( $G_1 = \gamma V_1$ ,  $G_2 = \gamma V_2, \dots$ ); înlocuind în expresiile (2.26), greutatea specifică  $\gamma$  iese în factor comun, atît la numărător cît și la numitor și se simplifică, rămî-nînd :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + \dots + V_n x_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n} = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + \dots + V_n x_n}{V}, \\ \eta &= \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2 + \dots + V_n y_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n} = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2 + \dots + V_n y_n}{V}, \\ \zeta &= \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + \dots + V_n z_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n} = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + \dots + V_n z_n}{V}.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Acestea sînt formulele pentru calculul centrului de greutate al volumelor omogene.

Dacă este vorba de un corp la care două dintre dimensiuni (lungimea și lățimea) sînt mult mai mari decît cea de-a treia (grosimea), corp denumit *placă*, considerată omogenă, greutatea unei particule se exprimă printr-o formulă similară celei din cazul volumelor, și anume  $G = \gamma A$ , în care  $\gamma$  este greutatea specifică a unității de suprafață, iar  $A$  un element de arie al plăcii ( $G_1 = \gamma A_1$ ,  $G_2 = \gamma A_2, \dots$ ). Introducînd în formulele (2.26) și simplificînd cu  $\gamma$ , obținem formulele pentru calculul centrului de greutate al plăcilor omogene :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n}{A}, \\ \eta &= \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A}, \\ \zeta &= \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + \dots + A_n z_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + \dots + A_n z_n}{A},\end{aligned}\quad (2.28)$$

$A$  fiind aria totală a plăcii.

Procedînd în mod analog în cazul corpurilor la care una dintre dimensiuni (lungimea) este mult mai mare decît celelalte două, corpuri denumite *bare* sau *fire*, considerate omogene, vom exprima greutatea unui element de lungime prin formula  $G = \gamma l$ ,  $\gamma$  fiind greutatea specifică a unității de lungime, iar  $l$  un element de lungime al barei sau firului. Introducînd în formulele (2.26) și simplificînd cu  $\gamma$ , obținem formulele pentru calculul centrului de greutate al barelor omogene:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_n x_n}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_n x_n}{L}, \\ \eta &= \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + \dots + l_n y_n}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + \dots + l_n y_n}{L}, \\ \varphi &= \frac{l_1 z_1 + l_2 z_2 + \dots + l_n z_n}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} = \frac{l_1 z_1 + l_2 z_2 + \dots + l_n z_n}{L},\end{aligned}\quad (2.29)$$

$L$  fiind lungimea totală a barei sau firului.

Formulele (2.27), (2.28) și (2.29) conțin numai elementele geometrice ale corpului respectiv: lungimi, arii, volume, fapt care arată că *la corpurile omogene poziția centrului de greutate depinde numai de forma lor geometrică*.

f) **Centrele de greutate ale corpurilor simetrice.** Foarte multe dintre piesele și organele mașinilor sînt corpuri avînd un plan, o axă sau un centru de simetrie; la aceste corpuri, centrul de greutate se află în planul de simetrie, pe axa de simetrie sau în centrul de simetrie al corpului respectiv.

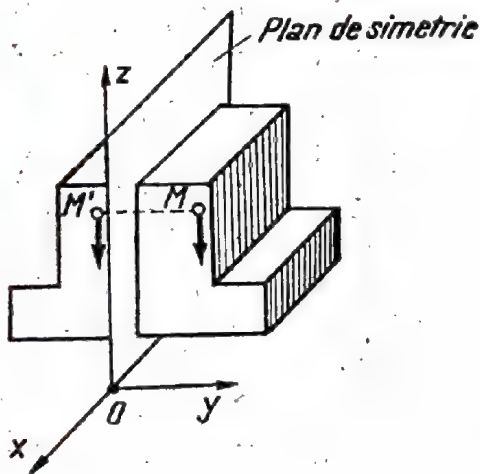


Fig. 2.43.

Într-adevăr, după cum rezultă din figura 2.43, în care am reprezentat un corp avînd un plan de simetrie, pe care l-am ales ca plan  $xOz$  al sistemului de referință, fiecărui punct  $M$ , avînd ordonata  $y$ , în jurul căruia luăm elementul de volum  $V$  îi corespunde în stînga planului de simetrie un alt punct  $M'$  (simetricul lui  $M$ ), avînd în ju-

rul său un volum  $V$ , dar a cărui ordonată este  $-y$ . Aceasta înseamnă că în cea de-a doua formulă (2.27) suma de la numărător va conține o serie de termeni pozitivi și negativi care se vor reduce și o serie de termeni nuli corespunzînd punc-



telor din planul de simetrie care au ordonata  $\eta$  nulă. Rezultă  $\eta = 0$ , adică centrul de greutate al corpului se află în planul de simetrie  $xOz$ . Celelalte proprietăți enunțate se demonstrează în același mod.

În figura 2.44 sînt reprezentate o serie de corpuri omogene avînd axe sau centre de simetrie, precum și pozițiile centrelor de greutate.

g) Centrele de greutate ale corpurilor simple. Centrul de greutate al unei linii frînte omogene înscrise într-un cerc. Fie

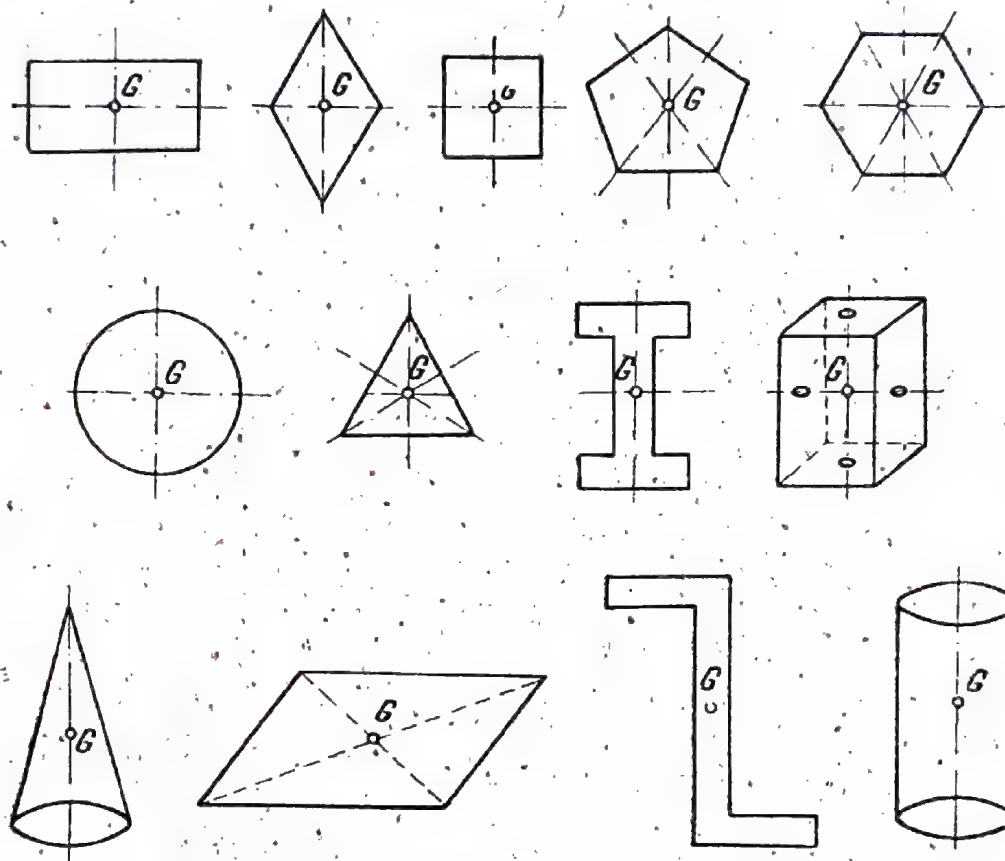


Fig. 2.44.

dată linia frîntă omogenă  $ABCDEF$ , tangentă unui cerc de rază  $R$  și centrul  $O$  (fig. 2.45), elementele liniei fiind de lungimi egale.

Presupunem că linia frîntă cuprinde cel mult jumătate din circumferință. Ducînd axa de simetrie  $Ox$  rezultă că centrul său de greutate trebuie să se afle pe această axă. Pentru aceasta aplicăm prima dintre formulele (2.29)

$$\xi = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_n x_n}{L} \quad (2.30)$$

Să luăm spre exemplu latura  $AB$ . Pentru această latură avem  $l_1 = AB = l$  și  $x_1 = OH$ . Din triunghiurile asemenea  $OHG$  și  $AA'B$  deducem :

$$\frac{OH}{AA'} = \frac{OG}{AB},$$

de unde :

$$AB \cdot OH = l_1 x_1 = AA' \cdot OG = A_1 B_1 \cdot R.$$

Procedînd analog și pentru celelalte legmente vom obține, înlocuind în sormula(2.30) :

$$\xi = \frac{A_1 B_1 \cdot R + B_1 C_1 \cdot R + \dots + E_1 F_1 \cdot R}{AB + BC + \dots + EF}.$$

Dacă notăm cu  $d$  lungimea proiecției liniei frînte pe axa  $Oy$  și cu  $L$  lungimea liniei frînte, adică :

$$d = A_1 B_1 + B_1 C_1 + \dots + E_1 F_1$$

$$L = AB + BC + \dots + EF,$$

obținem :

$$\xi = R \frac{d}{L}. \quad (2.31)$$

Centrul de greutate al unui arc omogen (fig. 2.46). Notăm cu  $2\alpha$  unghiul la centru al arcului și cu  $R$  raza sa. Dacă considerăm arcul  $ABC$  ca limită a unei linii frînte regulate la care numărul laturilor crește nelimitat, iar lungimea fiecărei laturi tinde către zero, putem aplica formula (2.31) în care :

$$d = AC = 2R \sin \alpha,$$

$$L = R \cdot 2\alpha.$$

Introducînd în formula (2.31) obținem :

$$\xi = R \frac{2R \sin \alpha}{R 2\alpha} = \frac{R \cdot \sin \alpha}{\alpha}. \quad (2.32)$$

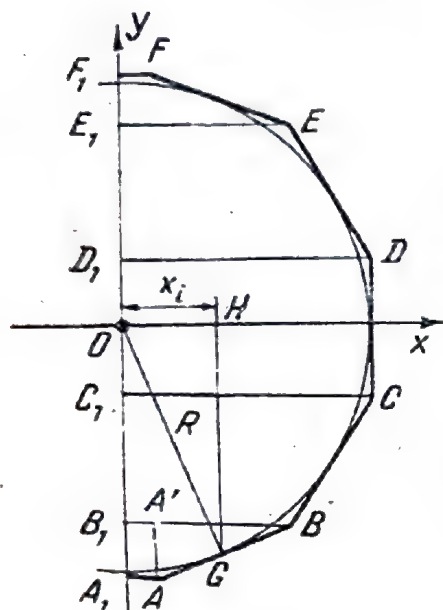


Fig. 2.45.

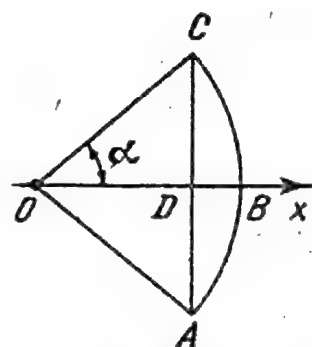


Fig. 2.46.



Dacă aplicăm această formulă la o semicircumferință, pentru care  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  obținem :

$$\xi = \frac{2R}{\pi} \approx 0,63662 R.$$

*Centrul de greutate al unei plăci omogene de formă triunghiulară.* Fie  $ABC$  triunghiul al cărui centru de greutate se caută. Dacă împărțim suprafața sa în fișii trapezoidale pe care le putem aproxima cu niște dreptunghiuri foarte subțiri, paralele cu baza  $BC$  (fig. 2.47), ale căror centre de greutate se află pe mediana  $AF$  rezultă că centrul de greutate al triunghiului se va găsi undeva pe această mediană. Împărțind triunghiul în fișii paralele cu latura  $AB$  și raționând la fel, se ajunge la concluzia că centrul de greutate al triunghiului trebuie să se afle și pe mediana  $CE$ ; rezultă deci că *centrul de greutate al plăcii triunghiulare omogene se află la intersecția medianelor.*

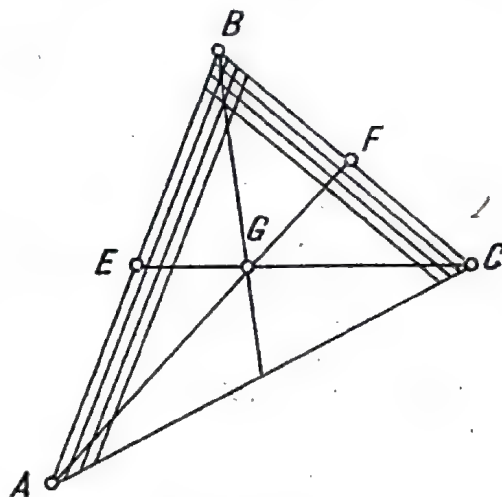


Fig. 2.47.

*Centrul de greutate al sectorului circular.* Fie sectorul circular  $OAB$  de rază  $R$  și unghiul la centru  $2\alpha$  (fig. 2.48). Centrul său de greutate se află pe axa de simetrie  $Ox$ . Dacă împărțim sectorul în triunghiuri foarte mici având drept bază arcul (coarda)  $MN$  și drept înălțime raza  $R$ , se constată că dacă se înlocuiesc aceste triunghiuri prin centrele lor de greutate se obține un arc de cerc de rază  $\frac{2}{3}R$ .

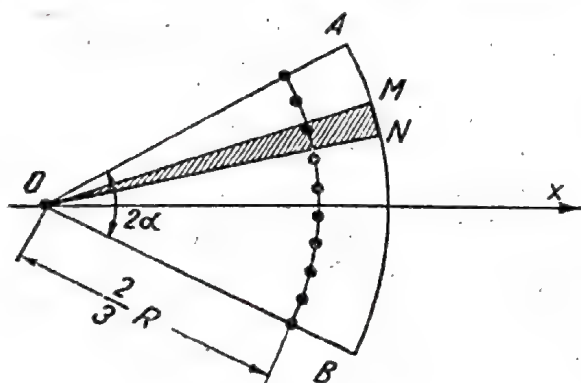


Fig. 2.48.

Problema s-a redus deci la aflarea centrului de greutate al acestui arc de cerc. Aplicând formula (2.32) obținem :

$$\xi = \frac{2}{3} \cdot \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (2.33)$$

h) Centrul de greutate al corpurilor omogene compuse din părți ale căror volume, arii sau lungimi și centre de greutate sînt cunoscute. În acest caz se procedează astfel :

— se raportează corpul la un sistem de trei axe dacă este un corp în spațiu, sau de două axe dacă este vorba de o figură plană ;

— se observă dacă corpul respectiv posedă anumite elemente de simetrie (plan, axă, centru de simetrie), știut fiind că centrul de greutate trebuie să se afle pe planul, axa sau în centrul de simetrie respectiv. În aceste cazuri, problema se simplifică, reducîndu-se numărul coordonatelor centrului de greutate ; pentru aceasta axa sau planul de simetrie se aleg respectiv axă sau plan de coordonate ;

— se împarte corpul în părți ale căror volume, arii sau lungimi precum și centre de greutate ne sînt cunoscute, astfel încît numărul acestora să fie cît mai mic, iar coordonatele centrelor lor de greutate cît mai ușor de aflat ;

— se alcătuieste o tabelă avînd numărul de linii egal cu numărul corpurilor componente ale corpului dat (tabela 2.3) ;

Tabela 2.3

Calculul poziției centrului de greutate al corpurilor

Nr.	$V_i$ ( $A_i, l_i$ )	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$V_i x_i$ ( $A_i x_i, l_i x_i$ )	$V_i y_i$ ( $A_i y_i, l_i y_i$ )	$V_i z_i$ ( $A_i z_i, l_i z_i$ )
Sume							

— se trece pe coloana  $V_i$  (sau  $A_i$  sau  $l_i$ ) valoarea volumului (sau ariei sau lungimii) corpului component respectiv, iar pe următoarele trei coloane ( $x_i, y_i, z_i$ ) coordonatele centrului său de greutate.

De observat că pe coloana  $V$  volumele părților corpului care lipsesc se trec cu semnul minus.

Celelalte operații pentru determinarea centrului de greutate se efectuează numai pe tabelă fără ajutorul figurii: se cal-



culează produsele  $V_ix_i$ ,  $V_iy_i$  și  $V_iz_i$  (respectiv  $A_ix_i$ ,  $l_ix_i$  etc.) precum și sumele din josul coloanelor  $V_i$ ,  $V_ix_i$ ,  $V_iy_i$ ,  $V_iz_i$ . Se împart apoi rezultatele însumării primelor trei coloane la prima, obținându-se coordonatele căutate ale centrului de greutate.

## 8. Aplicații

a) La strunjirea unei piese cilindrice se constată cu ajutorul unui dinamometru că rezistențele întâmpinate de cuțit au următoarele valori (fig. 2.49):

$$P_x = 450 \text{ kgf}, P_y = 630 \text{ kgf}, \\ P_z = 1800 \text{ kgf}.$$

Se cere să se calculeze modulul rezultantei și unghiurile sale de înclinare cu axele  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$ .

### Rezolvare

Modulul rezultantei se calculează cu formula (2.15):

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = \\ = \sqrt{450^2 + 630^2 + 1800^2} = \\ = 1960 \text{ kgf}.$$

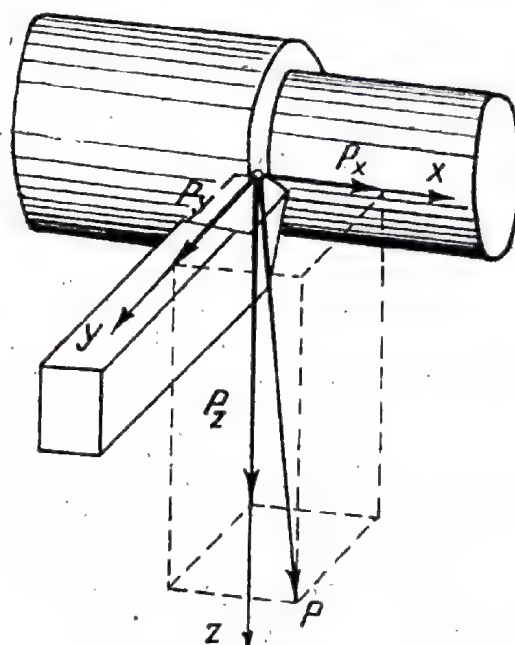


Fig. 2.49.

Cosinusurile directoare ale suportului rezultantei cu axele  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$  se calculează cu formulele (2.17):

$$\cos \alpha = \frac{P_x}{P} = \frac{450}{1960} = 0,23; \cos \beta = \frac{P_y}{P} = \frac{630}{1960} = 0,32;$$

$$\cos \gamma = \frac{P_z}{P} = \frac{1800}{1960} = 0,92,$$

de unde rezultă:

$$\alpha = 76^\circ 41', \beta = 71^\circ 7', \gamma = 23^\circ.$$

b) Se cere să se reducă sistemul celor două forțe paralele din figura 2.50, a, aplicate în punctele A și B situate la distanța  $a$ .

## Rezolvare

Orice sistem de forțe paralele în plan sau în spațiu se reduce la o singură rezultantă; valoarea rezultantei și poziția punctului de aplicație nu se schimbă dacă toate forțele sistemului se rotesc în jurul

punctelor de aplicație cu același unghi și în același sens. Vom raționa deci pe cazul din figura 2.50, b.

Avem:

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = F_1 + F_2,$$

deci:

$$R = F_1 + F_2.$$

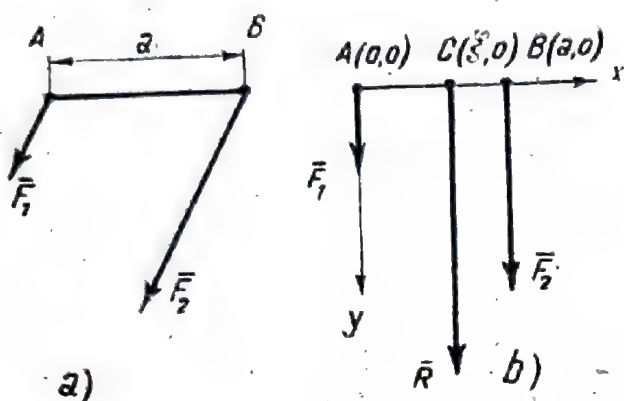


Fig. 2.50.

Coordonata  $\xi$  a punctului de aplicație al rezultantei se află cu formula (2.25):

$$\xi = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i} = \frac{F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot a}{F_1 + F_2} = \frac{F_2 a}{F_1 + F_2}.$$

Se poate verifica ușor că:

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{F_1 + F_2}{AB},$$

adică punctul C împarte distanța AB în rapoarte invers proporționale cu forțele. Într-adevăr, înlocuind în această formulă:

$$BC = a - \xi = a - \frac{F_2 a}{F_1 + F_2} = \frac{a F_1}{F_1 + F_2},$$

$$AC = \xi = \frac{F_2 a}{F_1 + F_2},$$

$$AB = a$$

se obține o identitate.

c) Se cere să se reducă sistemul de forțe paralele din figura 2.51. Se dă:  $F_1 = F_3 = F_5 = 3 \text{ tf}$ ,  $F_2 = F_4 = 2 \text{ tf}$ ,  $a = 1 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ ,  $c = 1,5 \text{ m}$ .



### Rezolvare

Sistemul de forțe paralele în spațiu se reduce la o rezultantă. Vom calcula modulul rezultantei și coordonatele punctului său de aplicație (centrul forțelor paralele).

Rezultanta are modulul :

$$R = F_1 + F_3 + F_5 - F_2 - F_4 = 5 \text{ tf}$$

și este îndreptată în jos (spre sensul negativ al axei  $Oz$ ).

Coordonatele punctului său de aplicație sînt date de formulele (2.24) și (2.25) :

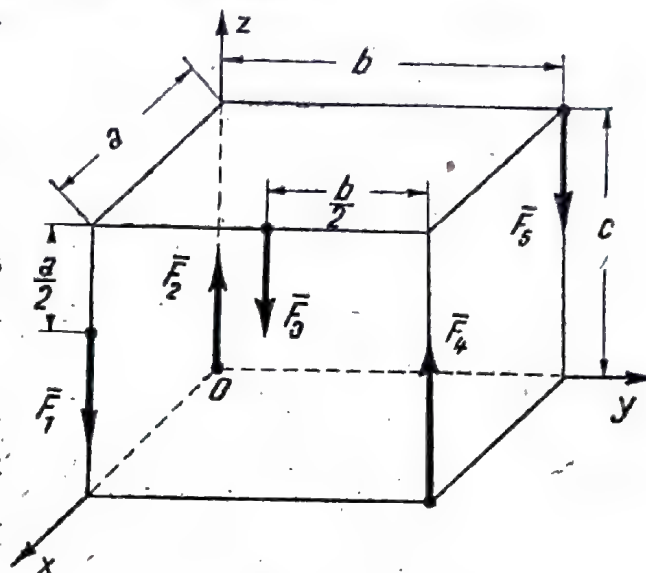


Fig. 2.51.

$$\xi = \frac{-F_1 \cdot a + F_2 \cdot 0 - F_3 \cdot a + F_4 \cdot a - F_5 \cdot 0}{-F_1 + F_2 - F_3 + F_4 - F_5} = \frac{-4 \times 1}{-5} = \frac{4}{5} \text{ m},$$

$$\eta = \frac{-F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 0 - F_3 \cdot \frac{b}{2} + F_4 \cdot b - F_5 \cdot b}{-F_1 + F_2 - F_3 + F_4 - F_5} = \frac{-3 \times 1 + 2 \times 2 - 3 \times 2}{-5} = 1 \text{ m},$$

$$\zeta = \frac{-F_1 \cdot \frac{c}{2} + F_2 \cdot 0 - F_3 \cdot c + F_4 \cdot 0 - F_5 \cdot c}{-F_1 + F_2 - F_3 + F_4 - F_5} = \frac{-3 \times 0,75 - 3 \times 1,5 - 3 \times 1,5}{-5} = 2,25 \text{ m}$$

d) Se cere să se determine centrul de greutate al piesei din figura 2.52.

### Rezolvare

Piesa din figura 2.52 poate fi descompusă în trei piese componente avînd forma unor cilindri circulari drepti, și anume :

— cilindrul I de diametru exterior  $d_1$ , diametru interior  $d_2$  și înălțime  $a_1$ ;

— cilindrul *II* de diametru exterior  $D$ , diametru interior  $d_2$  și înălțime  $a_2$ ;

— cilindrul *III* de diametru  $d_3$  și înălțime  $a_3$ .

Piesa admite un plan de simetrie; alegînd sistemul de axe astfel încît acest plan să fie chiar planul  $xOz$  vom avea  $\eta = 0$ .

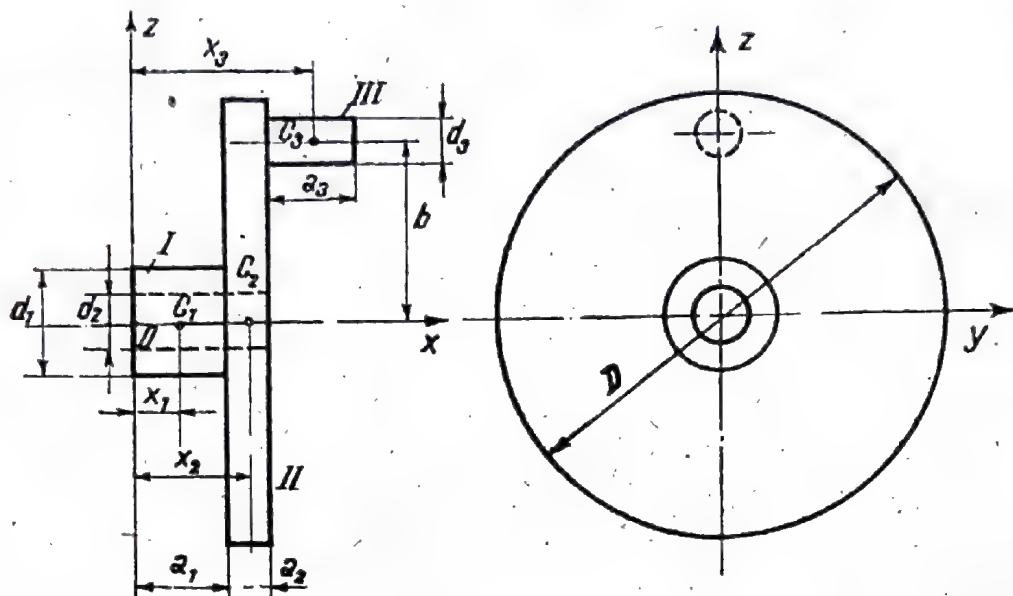


Fig. 2.52.

Centrele de greutate ale celor trei porțiuni componente sînt  $C_1, C_2, C_3$ ; coordonatele lor ( $x$  și  $z$ ) sînt arătate pe figura 2.52.

Cu aceasta putem trece la alcătuirea unei tabele din care vor lipsi coloanele  $y_i$  și  $V_i y_i$  datorită simetriei în raport cu planul  $xOz$  (tabela 2.4).

Prin împărțirea ultimelor coloane la prima obținem:

$$\xi = \frac{(d_1^2 - d_2^2) a_1^2 + (D^2 - d_2^2) a_2 (2a_1 + a_2) + d_3^2 a_3 (2a_1 + 2a_2 + a_3)}{2 [(d_1^2 - d_2^2) a_1 + (D^2 - d_2^2) a_2 + d_3^2 a_3]}$$

$$\zeta = \frac{d_3^2 a_3 b}{(d_1^2 - d_2^2) a_1 + (D^2 - d_2^2) a_2 + d_3^2 a_3}$$

Pentru valorile numerice în milimetri

$$d_1=60, d_2=d_3=30, D=250, a_1=a_3=50, a_2=25, b=100$$

se obține:

$$\xi = 60,5 \text{ mm}, \quad \zeta = 2,6 \text{ mm}.$$



Tabela 2.4

Poziția centrului de greutate al corpului de la aplicația  $d$ 

Nr.	$V_i$	$x_i$	$z_i$	$V_i x_i$	$V_i z_i$
I	$\frac{\pi (d_1^2 - d_2^2) a_1}{4}$	$\frac{a_1}{2}$	0	$\frac{\pi (d_1^2 - d_2^2) a_1^2}{8}$	0
II	$\frac{\pi (D^2 - d_2^2) a_2}{4}$	$a_1 + \frac{a_2}{2}$	0	$\frac{\pi (D^2 - d_2^2) a_2 (2a_1 + a_2)}{8}$	0
III	$\frac{\pi d_3^2 a_3}{4}$	$a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2}$	$b$	$\frac{\pi d_3^2 a_3 (2a_1 + 2a_2 + a_3)}{8}$	$\frac{\pi d_3^2 a_3 b}{4}$
	$\frac{\pi (d_1^2 - d_2^2) a_1}{4} +$ $+\frac{\pi (D^2 - d_2^2) a_2}{4} +$ $+\frac{\pi d_3^2 a_3}{4}$			$\frac{\pi (d_1^2 - d_2^2) a_1^2}{8} +$ $+\frac{\pi (D^2 - d_2^2) a_2 (2a_1 + a_2)}{8} +$ $+\frac{\pi d_3^2 a_3 (2a_1 + 2a_2 + a_3)}{8}$	$\frac{\pi d_3^2 a_3 b}{4}$

## Capitolul III

## A DOUA PROBLEMĂ A STATICII : STUDIUL ECHILIBRULUI SISTEMELOR MATERIALE

### 1. Generalități

A doua problemă fundamentală a staticii, care va fi examinată în cele ce urmează, este aceea a studiului echilibrului unui sistem material sub acțiunea forțelor exercitate asupra lui de către corpurile înconjurătoare.<sup>1</sup> Acest studiu prezintă în mare

<sup>1</sup> Se obișnuiește să se spună că „un corp se află în echilibru” deși corect ar trebui spus că „sistemul forțelor care acționează corpul respectiv se află în echilibru”.

două aspecte; primul dintre ele este legat de *determinarea poziției* în care un anumit corp rămîne în echilibru sub acțiunea exercitată asupra lui de către corpurile înconjurătoare, iar cel de-al doilea se ocupă de *determinarea valorilor forțelor* cu care corpurile acționează unele asupra celorlalte.

Metoda generală analitică de rezolvare a acestor probleme o constituie *metoda ecuațiilor de echilibru*, care se aplică oricărui sistem material, indiferent de natura sa (punct material, solid, rigid, sistem de solide rigide) sau de natura sistemului de forțe care este aplicat corpului (forțe coliniare, concurente, paralele, coplanare sau în spațiu).

## 2. Legăturile sistemelor materiale

a) **Corpuri libere și corpuri supuse la legături:** *axioma legăturilor*. Să examinăm mișcarea unei pietre azvîrlite în aer; ea poate ocupa orice poziție din spațiu, fără a fi împiedicată de ceva să facă acest lucru. Pentru o mărgea găurită care alunecă pe sîrmă nu este însă aceeași situație; într-adevăr, în acest caz mărgeaua nu poate ocupa orice poziție în spațiu, ci numai pozițiile permise de sîrma pe care ea alunecă.

Aceste două situații sînt caracteristice pentru toate corpurile întîlnite în mecanică; în cele ce urmează le vom distinge prin aceea că vom denumi *corpuri libere* acele corpuri care nu suferă nici o îngrădire de natură geometrică în ceea ce privește pozițiile pe care le pot ocupa în spațiu și *corpuri supuse la legături* acele corpuri care sînt obligate să rămîină în anumite regiuni ale spațiului datorită faptului că trebuie să păstreze un contact permanent cu alte corpuri.

Să analizăm mai îndeaproape de ce natură sînt consecințele pe care le are existența unei legături la un corp rigid.

Mai întîi, existența unei legături are o consecință de natură *geometrică*, ce constă în aceea că posibilitățile de mișcare ale unui corp supus la legături sînt mai mici decît cele ale aceluiași corp liber. Aceasta se manifestă prin aceea că numărul gradelor de libertate ale unui corp supus la legături este mai mic decît numărul gradelor de libertate ale aceluiași corp considerat liber; acest fapt a mai fost pus în evidență și în capitolul I.

A doua consecință este de natură *fizică*; existența unei legături, a unui contact între două corpuri, face ca atît din



partea corpului considerat către corpul cu care este legat, cât și din partea celui de-al doilea corp către primul, să se exercite forțe și cupluri, denumite *forțe și cupluri de legătură* sau *reacțiuni* ale legăturii. Existența acestor forțe și cupluri poate fi pusă ușor în evidență prin următorul exemplu: să considerăm un corp așezat pe o masă orizontală. Corpul este acționat numai de greutatea sa, dirijată vertical în jos. Datorită acțiunii acestei forțe, corpul ar trebui să se pună în mișcare, fapt care știm cu toții că nu se întâmplă. Starea de repaus a corpului este datorită faptului că din partea mesei se exercită asupra corpului o forță egală și direct opusă greutății lui, care echilibrează deci greutatea, menținându-l în repaus. Acțiunea corpului asupra mesei este egală cu reacțiunea exercitată de masă asupra corpului.

Generalizarea acestei observații, precum și a altora asemănătoare deduse din experiență este cunoscută în mecanică sub denumirea de *axioma legăturilor*; ea se enunță astfel: *orice legătură poate fi înlocuită printr-o forță sau un cuplu*, denumite reacțiunile legăturii. Între reacțiunile legăturilor ca vectori și mișcările împiedicate de legătura respectivă există următoarea relație: orientarea reacțiunilor (direcția și uneori și sensul) este determinată de direcția și sensul mișcării interzise de legătura respectivă, și anume: ele au aceeași direcție și sensuri inverse celor ale mișcărilor interzise, iar mărimea este determinată de restul forțelor exterioare aplicate corpului. Astfel, în exemplul corpului rezemat pe masă reacțiunea este perpendiculară pe masă (direcția) și îndreptată vertical în sus (sensul), deoarece legătura corp-masă interzice mișcarea pe verticală în jos a corpului, neputînd însă interzice mișcarea pe verticală în sus (fig. 3.1, a). În schimb, în cazul unei mărgele înșirate pe o sîrmă, reacțiunea are numai direcția determinată, și anume aceea a normalei pe sîrmă în punctul de rezemare, deoarece legătura mărgea-sîrmă permite orice mișcare în afară de acelea pe direcția normală ei. Cum într-un punct la o curbă se pot duce în general o infinitate de normale, rezultă că reacțiunea poate fi dirijată pe oricare dintre aceste normale (fig. 3.1, b). Dacă bila ar fi jumătate tăiată ca în figura 3.1, c, reacțiunea normală ar putea avea oricare din pozițiile desenate plin și nu ar putea avea nici una dintre pozițiile desenate punctat. Această ultimă legătură cât și legătura corp-masă examinată mai sus, care împiedică deplasarea corpului respectiv numai într-un anumit sens pe direcția normalei în punctul de contact (cazul legăturii corp-masă) sau a normalelor în punctul de

contact (cazul sîrmă-bilă secționată), se numesc *legături unilaterale*, spre deosebire de legăturile de tipul bilă-sîrmă care se numesc *legături bilaterale*.

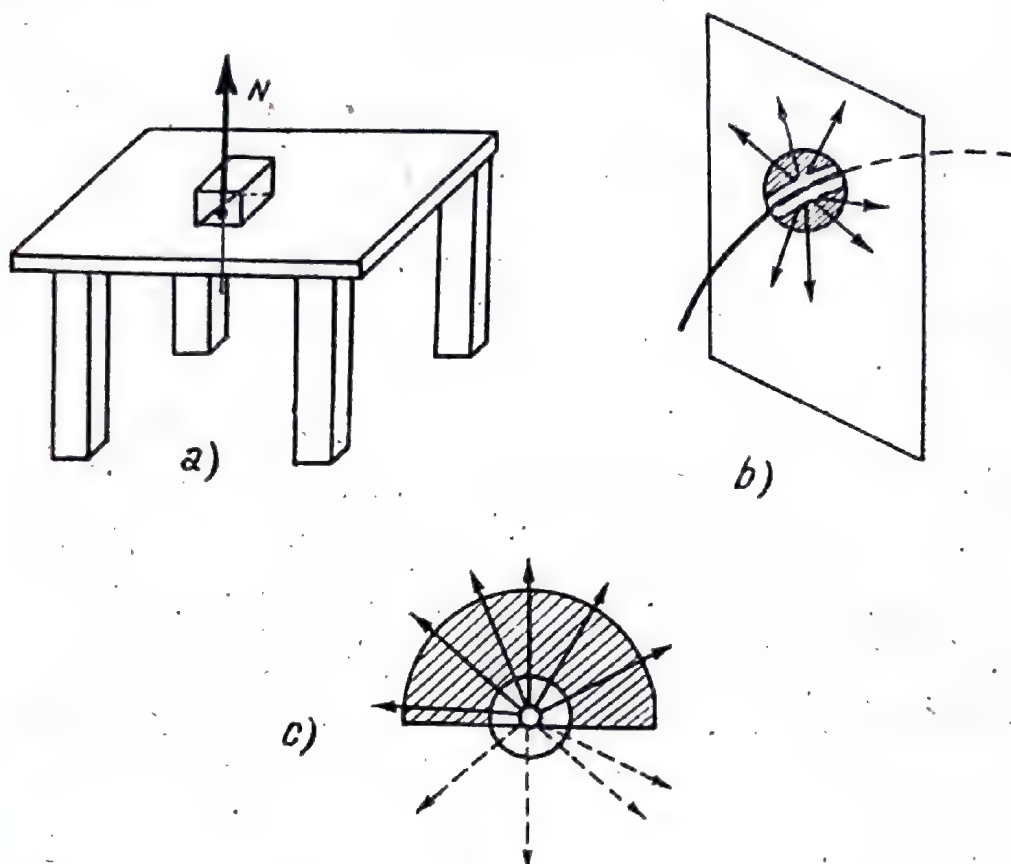


Fig. 3.1.

b) **Legăturile punctului material.** Modurile în care un punct material poate fi legat de corpurile înconjurătoare sînt :

- rezemarea pe o suprafață ;
- rezemarea pe o curbă ;
- prinderea cu fire sau bare.

Primele două moduri au fost examinate la punctul precedent : în ambele cazuri, reacțiunea legăturii este situată pe normală (în primul caz normala la suprafața de rezemare, iar în cel de-al doilea, normala la curba de rezemare). Trebuie remarcat faptul că deoarece la o suprafață într-un punct, se poate duce în general o singură normală, legătura prin rezemare pe o suprafață introduce o singură necunoscută, modulul  $N$  al reacțiunii. În ceea ce privește legătura prin rezemare pe o curbă, datorită faptului că în general la o curbă într-un punct



se pot duce o infinitate de normale, toate situate în planul normal la curbă în punctul respectiv, reacțiunea introduce două necunoscute: modulul său  $N$  și orientarea dată prin unghiul  $\alpha$  al direcției sale cu o direcție fixă  $\Delta_1$ . Aceste două necunoscute

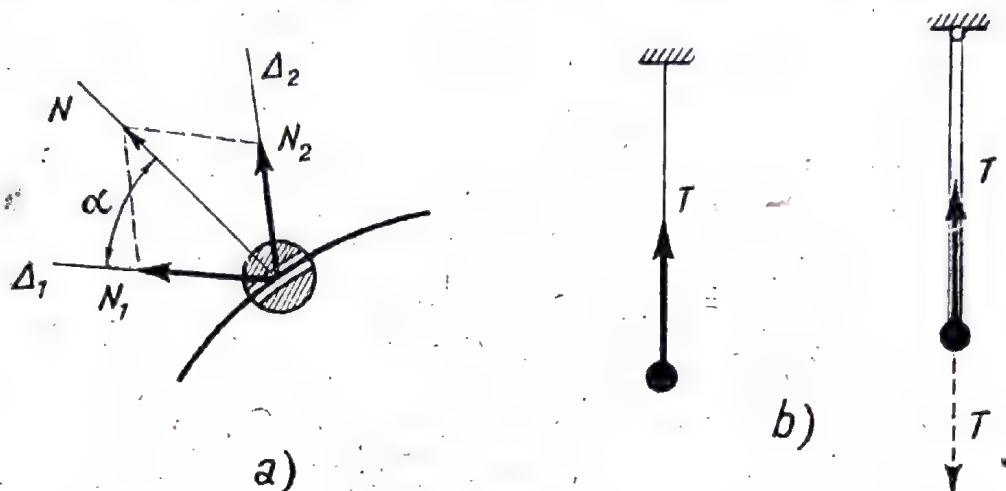


Fig. 3.2.

pot fi înlocuite cu altele două, și anume cu două componente  $N_1$  și  $N_2$  ale reacțiunii după două direcții cunoscute.  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$ . O dată aflate modulele acestor componente reacțiunea totală se află cu ajutorul regulii paralelogramului (fig. 3.2, a).

La un punct material prins cu un fir de un perete fix, este interzisă o singură mișcare, și anume aceea în lungul firului în sensul lungirii sale, dar nu și în sens contrar. Rezultă că reacțiunea  $T$  a firului este îndreptată de-a lungul firului, totdeauna în sensul plecând de la punct, pe fir, spre punctul de suspensie (fig. 3.2, b).

Din aceleași motive, la un punct material prins cu o bară rigidă de un perete fix, reacțiunea  $T$  este dirijată de-a lungul barei, însă spre deosebire de fir ea poate avea ambele sensuri pe această direcție. Aceasta se datorește faptului că bara este rigidă atât atunci când este întinsă cât și atunci când este comprimată, pe când firul este rigid numai atunci când este întins. Putem spune deci că legătura cu fire este o legătură unilaterală; legătura cu bare este o legătură bilaterală.

Ca observație generală, constatăm că toate legăturile punctului îi transmit acestuia o singură forță concentrată (reacțiunea legăturii).

c) **Legăturile solidului rigid.** Modurile în care un corp solid rigid poate fi legat de corpurile înconjurătoare sînt mult

mai complexe decât în cazul punctului material. Datorită faptului că solidul rigid are o întindere în una, două sau trei dimensiuni, legătura îi poate transmite nu numai o singură forță concentrată, ca în cazul punctului, ci și forțe distribuite, sau chiar cupluri. În cele ce urmează vom examina numai câteva dintre legăturile solidului rigid, și anume numai pe acelea la care forța transmisă de legătură este o forță concentrată la fel ca în cazul punctului, sau un cuplu concentrat. În practică, riguros vorbind, asemenea legături nu se întâlnesc; ele constituie deci numai niște aproximații ale legăturilor reale, menite să ușureze calculele privind echilibrul solidului rigid, cu o eroare multumitoare pentru nevoile tehnice.

Mai întâi vom întâlni aceleași legături ca și în cazul punctului, și anume:

- rezemarea într-un punct pe o suprafață;
- rezemarea într-un punct pe o curbă;
- prinderea cu fire sau bare.

Reacțiunile legăturilor în aceste cazuri sînt aceleași ca în cazul punctului, așa încît nu le vom mai examina.

Cea de-a doua categorie de legături este constituită de legături specifice solidului rigid; una dintre aceste legături este denumită *articulație*. Articulația este în general o legătură care permite corpului legat să se rotească în jurul său, fără a-i da însă și posibilitatea de translație. Articulația poate fi de două feluri, după forma părții corpului care este legată, și anume: articulație cilindrică (fig. 3.3, a), dacă o parte cilindrică mobilă a corpului se îmbină cu o parte cilindrică fixă a legăturii, sau articulație sferică (fig. 3.3, b), dacă forma părții care se îmbină este sferică.

Ca exemple de articulații cilindrice putem cita legătura dintre bolt și bielă la un motor sau balamalele tuturor ușilor; ca exemple de articulație sferică putem cita suspensia unui aparat de fotografiat sau suspensia pîrghiei schimbătorului de viteze de la un automobil (fig. 3.3, c).

Contactul dintre corp și legătură se realizează în cazul articulației cilindrice pe suprafața unui cilindru, dacă articulația este strînsă, sau pe o generatoare a sa, dacă articulația are joc; în cazul articulației sferice, contactul între corp și legătură se realizează pe o suprafață sferică.

Să considerăm cazul articulației cilindrice plane, la care contactul se efectuează între două cercuri care se ating într-un punct oarecare de pe periferia lor (fig. 3.4, a). Cum contactul se efectuează într-un singur punct, putem considera că avem



un reazem și deci reacțiunea  $\bar{R}$  este dirijată pe normala  $\Delta$  comună celor două cercuri în punctul de contact. Noi nu cunoaștem însă poziția punctului de contact, căci ea este funcție

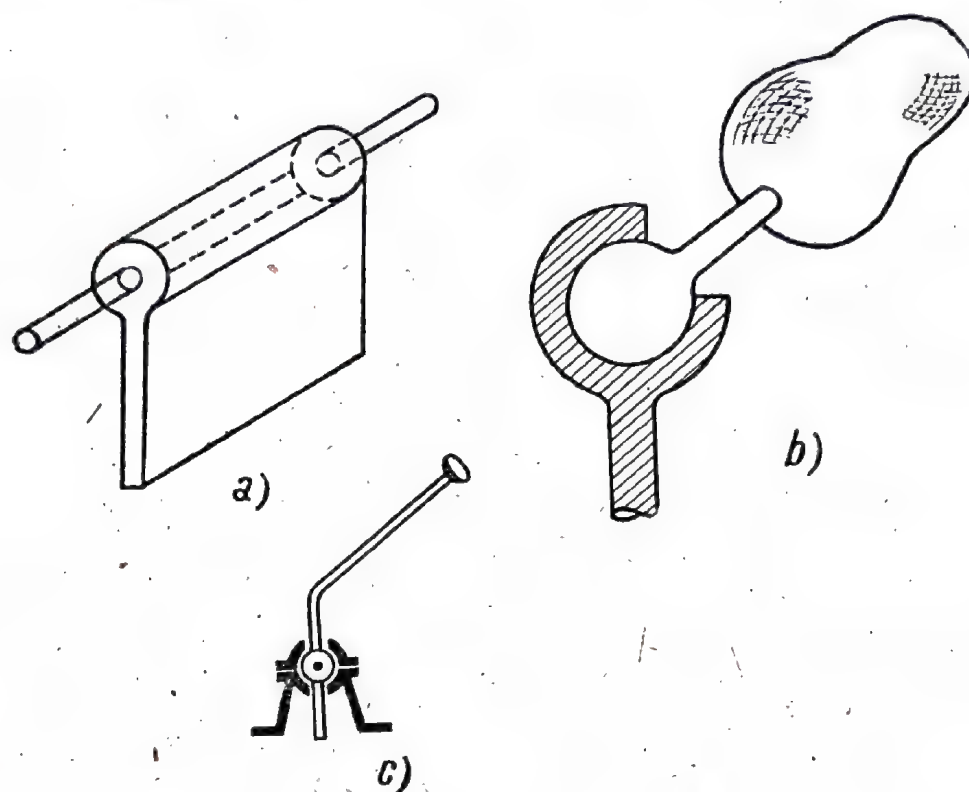


Fig. 3.3.

de forțele aplicate solidului; de aceea, putem spune că *articulația cilindrică plană se comportă ca rezemarea unui punct pe o curbă*; ea introduce două necunoscute: modulul reacțiunii  $\bar{R}$

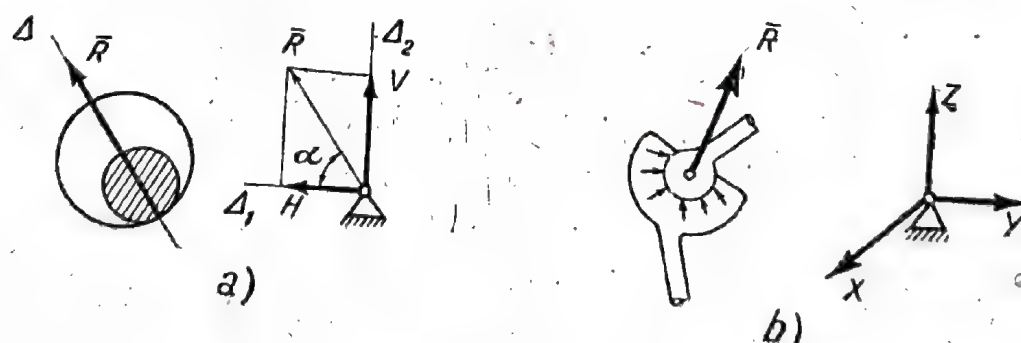


Fig. 3.4.

și unghiul său  $\alpha$  cu o direcție fixă  $\Delta_1$ , sau două componente ale sale  $\bar{H}$  și  $\bar{V}$ , pe două direcții cunoscute  $\Delta_1, \Delta_2$ .

În cazul articulației sferice, rezemarea se face într-o infinitate de puncte; în fiecare dintre aceste puncte legătura transmite câte o forță normală. Sistemul forțelor de legătură este deci un sistem de forțe concurente în centrul articulației sferice; un asemenea sistem se reduce la o singură rezultantă  $\bar{R}$ . Deoarece nu este cunoscut nici modulul nici direcția acestei rezultante, putem spune că articulația sferică introduce trei necunoscute: componentele  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$  ale rezultantei reacțiunilor din punctul de contact pe trei direcții fixe din spațiu (fig. 3.4, b).

O altă legătură a solidului rigid este *încăstrarea*. Ea este o legătură care suprimă corpului legat orice posibilitate de mișcare, immobilizându-l într-o anumită poziție. Ca exemple de în-

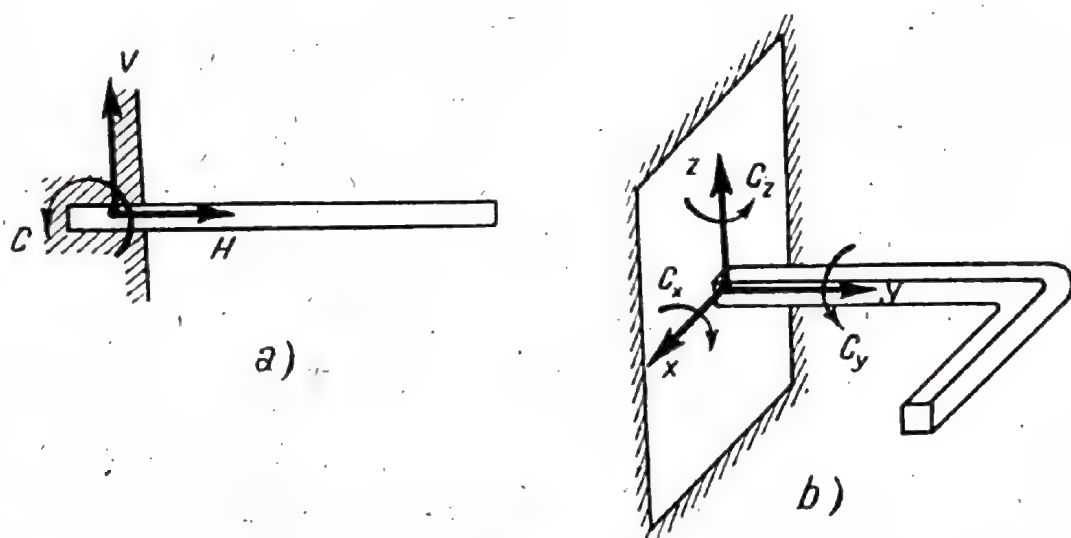


Fig. 3.5.

castrări putem cita încăstrarea balcoanelor în ziduri, a stîlpilor în fundații etc. O încăstrare plană introduce trei necunoscute: cele două componente  $H$  și  $V$  ale reacțiunii pe două direcții fixe și momentul  $C$  al cuplului care împiedică rotația (fig. 3.5, a); o încăstrare în spațiu va introduce șase necunoscute: cele trei componente  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ale reacțiunii pe trei direcții fixe și cele trei valori  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$  ale momentelor cuplurilor pe trei axe fixe (fig. 3.5, b).

Acestea sînt cele mai importante legături ale solidului rigid cu ajutorul cărora putem aproxima legăturile întîlnite în mod practic în tehnică.



### 3. Mărimile care intervin în studiul echilibrului unui sistem material

După cum am arătat, statica se ocupă cu studiul echilibrului corpurilor. Mărimile care intervin într-o problemă de statică sînt :

— *mărimi care caracterizează vectorii forță aplicați sistemului material respectiv*; acestea sînt : module ale forțelor, unghiuri ale suporturilor forțelor, distanțe și unghiuri care caracterizează pozițiile punctelor lor de aplicație. Aceste mărimi sînt cunoscute pentru forțele date și parțial necunoscute pentru reacțiuni. Astfel, pentru reacțiunea dintr-un reazem modulul este necunoscut, iar direcția este determinată de normala în punctul de rezemare ;

— *mărimi geometrice și mecanice care caracterizează sistemul material* ; acestea sînt : distanțe sau unghiuri care caracterizează forma geometrică a corpului considerat, masa corpului, poziția centrului său de greutate ;

— *mărimi care caracterizează poziția sistemului material* ; acestea sînt : distanțe sau unghiuri formînd mărimile geometrice care caracterizează poziția sistemului material considerat, și despre care s-a vorbit în capitolul I.

Într-o problemă de statică, aceste mărimi se împart în două mari categorii : *date* și *necunoscute*. Orice problemă se consideră rezolvată cînd toate necunoscutele sînt exprimate numai în funcție de datele problemei respective. În principiu, oricare dintre aceste mărimi poate juca într-o problemă de statică atît rolul de dată cît și rolul de necunoscută ; totuși, în problemele practice curente, există o anumită împărțire a acestor mărimi între date și necunoscute, care se păstrează în general aceeași, cu unele mici excepții.

Trebuie remarcat că există anumite probleme de statică în care nu se cer valorile tuturor necunoscutelor din problema respectivă ; astfel, există probleme de statică în care se cere numai poziția de echilibru a sistemului material considerat, fără a se cere și valorile reacțiunilor. În asemenea cazuri, va trebui să alegem dintre ecuațiile de echilibru numai pe acelea care conduc mai repede la rezultat, fără a complica în mod inutil problema respectivă.

În general, din punctul de vedere al datelor și al necunoscutelor, o problemă de statică se prezintă sub următorul aspect :

Date :

— mărimi ce caracterizează forțele date, aplicate sistemului material : module ale forțelor, distanțe, unghiuri ;

*Tabela 3.*

Date și necunoscute în problemele de echilibru

Date	Forțe	
	Mărimi geometrice și mecanice	
Necunoscute	Poziția de echilibru	
	Reacțiunile	

— mărimi geometrice și mecanice care caracterizează sistemul material : distanțe, unghiuri, mase.

Necunoscute :

— mărimi ce caracterizează poziția sistemului material (distanțe sau unghiuri) ;

— mărimi ce caracterizează forțele necunoscute aplicate sistemului material (distanțe, unghiuri, module) ;

aci intră în general reacțiunile în cazul sistemelor cu legături.

Mărimile care intervin în studiul echilibrului unui sistem material pot fi prezentate într-o tabelă de forma tabeli 3.1.

#### 4. Metoda analitică pentru studiul echilibrului sistemelor materiale

a) **Ecuatiile efective de echilibru.** Echilibrul unui sistem material (punct material, corp solid rigid, sistem de solide rigide) este realizat atunci când toți vectorii forță și vectorii cuplu care acționează asupra sistemului considerat își fac echilibru. Acest fapt se întâmplă atunci când toate cele șase componente (trei ale forței rezultante și trei ale momentului resultant) sînt nule, oricare ar fi punctul din spațiul față de care am face reducerea. Vor trebui deci îndeplinite următoarele condiții :

$$\begin{aligned} \Sigma F_{ix} &= 0 ; & \Sigma M_{ix} &= 0 ; \\ \Sigma F_{iy} &= 0 ; & \Sigma M_{iy} &= 0 ; \\ \Sigma F_{iz} &= 0 ; & \Sigma M_{iz} &= 0 . \end{aligned} \quad (3.1)$$



Acestea sînt cele mai generale ecuații de echilibru aplicabile atunci cînd asupra corpului acționează un sistem de forțe și cupluri situate oricum în spațiu.

După cîte ne este cunoscut însă din practică, situații în care corpurile sînt acționate de forțe și cupluri în spațiu sînt mai rare; de cele mai multe ori sistemele de forțe care acționează corpurile sînt sisteme particulare, de felul celor analizate la capitolul II (forțe concurente, paralele etc.). Ecuațiile (3.1) sînt aplicabile și în aceste cazuri, numai că o parte dintre ele se transformă în identități. Într-adevăr, să presupunem că un corp este acționat de un sistem de forțe concurente și coplanare, situate în planul  $xOy$ ; în acest caz, ecuația  $\Sigma F_{iz} = 0$  este o identitate, deoarece nici una dintre forțe nu dă proiecție pe axa  $Oz$  și deci această ecuație este satisfăcută de la sine prin însăși natura sistemului de forțe. De aceea, scrierea acestei ecuații nu ajută la rezolvarea problemei. Ecuațiile care nu se transformă în identități le vom denumi *ecuații efective*; pentru cazurile curențe de sisteme particulare de forțe analizate la capitolul II, numărul ecuațiilor efective este trecut în tabela 3.2, comparativ cu numărul componentelor elementelor de reducere.

Tabela 3.2

Componentele elementelor de reducere și ecuațiile de echilibru efective pentru diferite sisteme particulare de forțe

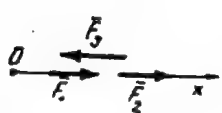
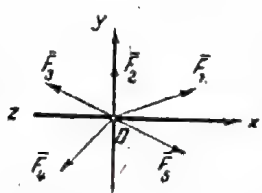
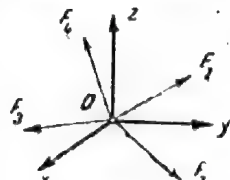

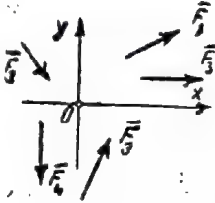
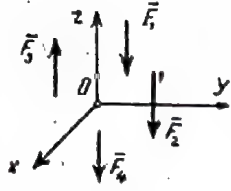
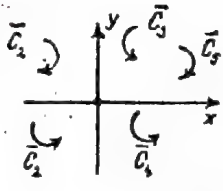
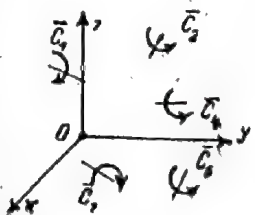
Nr.	Sistemul de forțe și sistemul de axe $Oxyz$	Figura	Componentele nenule ale elementelor de reducere în $O$	Ecuațiile efective de echilibru
1	Forțe coliniare pe axa $Ox$		$R_x = \Sigma F_{ix}$	$\Sigma F_{ix} = 0$
2	Forțe concurente și coplanare în punctul $O$ , planul $xOy$		$R_x = \Sigma F_{ix}$ $R_y = \Sigma F_{iy}$	$\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma F_{iy} = 0$
3	Forțe concurente în spațiu, în punctul $O$		$R_x = \Sigma F_{ix}$ $R_y = \Sigma F_{iy}$ $R_z = \Sigma F_{iz}$	$\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma F_{iy} = 0$ $\Sigma F_{iz} = 0$

Tabela 3.2 (continuare)

Nr.	Sistemul de forțe și sistemul de axe $Oxyz$	Figura	Componentele nenule ale elementelor de reducere în $O$	Ecuațiile efective de echilibru
4	Forțe paralele cu axa $Oy$ , coplanare în planul $xOy$		$R_y = \Sigma F_{iy}$ $M_z = \Sigma M_{iz}$	$\Sigma F_{iy} = 0$ $\Sigma M_{iz} = 0$
5	Forțe coplanare oarecare în planul $xOy$		$R_x = \Sigma F_{ix}$ $R_y = \Sigma F_{iy}$ $M_z = \Sigma M_{iz}$	$\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma F_{iy} = 0$ $\Sigma M_{iz} = 0$
6	Forțe paralele cu axa $Oz$ în spațiu		$R_z = \Sigma F_{iz}$ $M_x = \Sigma M_{ix}$ $M_y = \Sigma M_{iy}$	$\Sigma F_{iz} = 0$ $\Sigma M_{ix} = 0$ $\Sigma M_{iy} = 0$
7	Cupluri în planul $xOy$		$M_z = \Sigma M_{iz}$	$\Sigma M_{iz} = 0$
8	Cupluri în spațiu		$M_x = \Sigma M_{ix}$ $M_y = \Sigma M_{iy}$ $M_z = \Sigma M_{iz}$	$\Sigma M_{ix} = 0$ $\Sigma M_{iy} = 0$ $\Sigma M_{iz} = 0$



Din această tabelă se observă că *ecuațiile efective de echilibru ale unui sistem de forțe se obțin egalând cu zero componentele nenule ale elementelor de reducere.*

La examinarea ecuațiilor de echilibru pot avea loc trei cazuri :

— numărul ecuațiilor de echilibru poate fi mai mare decât numărul necunoscutelor ; în acest caz, eliminând din ecuațiile de echilibru necunoscutele, vom obține ecuații care leagă între ele caracteristicile mecanice și geometrice date ale corpului material : echilibrul va fi posibil numai după satisfacerea acestor ecuații. De aceea, aceste ecuații care nu conțin necunoscute se numesc *condiții de echilibru* ;

— numărul ecuațiilor de echilibru este egal cu numărul necunoscutelor, astfel încât din ele se pot determina valorile tuturor necunoscutelor.

Aceste prime două cazuri sînt denumite *cazuri static determinate* ;

— dacă din ecuațiile de echilibru nu se pot determina toate necunoscutele, adică numărul ecuațiilor este mai mic decât numărul necunoscutelor sau este egal cu cel al necunoscutelor dar ecuațiile nu sînt independente între ele, avem un *caz static nedeterminat*. În cazurile static nedeterminate nu sînt suficiente ecuațiile de echilibru ale staticii ; pentru determinarea tuturor necunoscutelor sîntem nevoiți să recurgem la studiul proprietăților elastice ale corpurilor ; de aceea, studiul cazurilor static nedeterminate este expus în rezistența materialelor.

**b) Indicații metodice privind rezolvarea problemelor de echilibru al sistemelor materiale cu ajutorul metodei analitice.** Din cele de mai sus rezultă că orice problemă de echilibru se reduce la scrierea și rezolvarea ecuațiilor efective de echilibru, în care intră toate forțele ce acționează sistemul material respectiv (forțe date și reacțiuni).

Pentru rezolvarea problemelor de echilibru se procedează în general astfel :

— se precizează parametrii geometrii care determină poziția sistemului material considerat (punct material, corp solid rigid, sistem de corpuri solide rigide) ;

— se figurează toate forțele exterioare date ;

— se eliberează sistemul respectiv de legături, dacă acestea există (în cazul punctului sau solidului rigid liber acestea nu există) ;

— se figurează reacțiunile legăturilor; pentru aceasta se încadrează legătura respectivă într-unul dintre cazurile studiate la punctul 2, cazurile *b* sau *c*;

— se alcătuește tabela cu datele și necunoscutele problemei respective;

— se consideră sistemul de forțe format de forțele exterioare și de reacțiunile legăturilor și se determină căruia dintre sistemele arătate în tabela 3.2 îi aparține, după care se iau din această tabelă ecuațiile de echilibru corespunzătoare;

— se verifică dacă problema este static determinată sau nu; pentru aceasta, trebuie ca numărul necunoscutelor problemei să nu depășească pe cel al ecuațiilor; se alege un sistem de axe și se scriu ecuațiile de echilibru, care se rezolvă. Se interpretează rezultatele și se aleg soluțiile care convin problemei respective.

## 5. Metoda grafică pentru studiul echilibrului sistemelor materiale

Metoda grafică pentru studiul echilibrului are la bază metoda grafică pentru reducerea sistemelor de forțe cu ajutorul celor două poligoane (poligonul forțelor și poligonul funicular). După cum s-a arătat în cadrul metodei analitice, condiția de echilibru a unui sistem material este ca elementele de reducere ale sistemului de forțe să fie nule, indiferent de punctul din spațiu față de care am efectua reducerea. Din punct de vedere grafic, aceasta corespunde condiției ca cele două poligoane să se închidă de la sine, adică, în poligonul forțelor, vârful ultimei forțe să coincidă cu originea primei forțe, iar în poligonul funicular, ultima rază polară să se suprapună peste prima. Acestea sînt condițiile grafice de echilibru. În cazul forțelor coliniare sau concurente în plan sau spațiu, este suficientă construcția poligonului forțelor, pe cînd în cazul forțelor coplanare oarecare sau paralele, se construiește atît poligonul forțelor cît și poligonul funicular.

În cele ce urmează vom trata cîteva aplicații mai importante ale calculului grafic la studiul echilibrului unui corp supus acțiunii unui sistem de forțe coplanare.

a) **Determinarea reacțiunilor unui corp supus legăturilor reazem simplu și articulație.** Să considerăm un corp supus acțiunii unui sistem de forțe coplanare care se reduce la rezul-



tanta  $\bar{F}$ , pentru care se cer reacțiunile din articulația  $a$  și reazemul  $b$ . Direcția  $\Delta_1$  a reacțiunii din reazemul  $b$  este cunoscută (fig. 3.6).

Corpul fiind supus acțiunii a trei forțe, acestea trebuie să fie concurente, căci altfel echilibrul nu este posibil. Într-adevăr, dacă compunem două dintre aceste forțe obținem o rezultantă care, pentru echilibru trebuie să fie egală și direct opusă celei de-a treia forțe. Procedeu este următorul :

— se intersectează suportul forței  $\bar{F}$  cu direcția  $\Delta_1$  a reacțiunii reazemului  $b$ , în punctul  $O$  ;

— se unește centrul articulației  $a$  cu punctul  $O$ , obținându-se astfel direcția  $\Delta_2$  a reacțiunii din articulația  $a$  ;

— se alunecă forța  $\bar{F}$  pe suportul său pînă în punctul  $O$  și se descompune după direcțiile  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$  respectiv în componentele  $\bar{F}_1$  și  $\bar{F}_2$  ; reacțiunile  $\bar{R}$  și  $\bar{N}$  din  $a$  și  $b$  sînt egale și direct opuse acestor două componente.

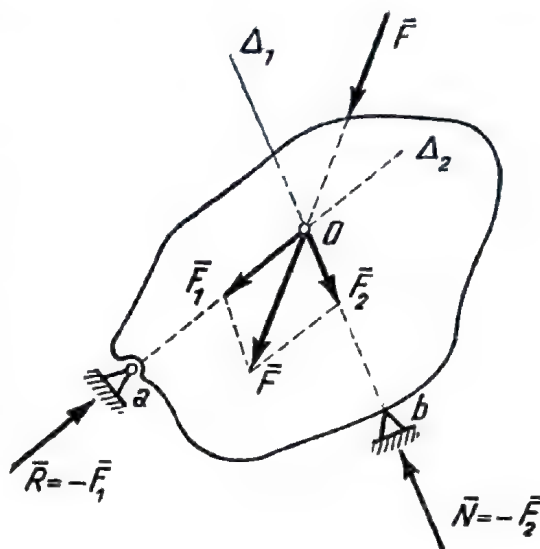


Fig. 3.6.

b) **Determinarea reacțiunilor unui corp supus legăturii prin trei reazeme simple, ale căror suporturi nu sînt concurente în același punct sau paralele.** Să considerăm un corp supus acțiunii unui sistem de forțe coplanare care se reduce la o rezultantă  $\bar{F}$ , pentru care se cer reacțiunile din reazemele  $A, B, C$  (fig. 3.7). Metoda grafică are la bază descompunerea unei forțe după trei direcții coplanare neconcurente sau neparalele. Procedeu este următorul :

— se intersectează forța  $\bar{F}$  cu suportul  $\Delta_1$  al uneia dintre reacțiuni în punctul  $O$  ;

— se unește punctul  $O$  cu punctul  $O_1$  de intersecție a celorlalte două direcții  $\Delta_2$  și  $\Delta_3$ , obținându-se direcția ajutoare  $\Delta$  ;

— se descompune forța  $\bar{F}$  după direcțiile  $\Delta_1$  și  $\Delta$  obținându-se componentele  $\bar{F}_1$  și  $\bar{F}_\Delta$  ; componenta  $\bar{F}_\Delta$  se descompune, în continuare, după direcțiile  $\Delta_2$  și  $\Delta_3$  în componentele  $\bar{F}_2$  și  $\bar{F}_3$ . Cele trei reacțiuni din reazeme,  $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$ , sînt egale și de sensuri contrare cu componentele  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ .

c) Determinarea reacțiunilor unei grinzi drepte pe două reazeme. Se consideră grinda  $AB$  simplu rezemată la extremități și acționată de un număr oarecare de forțe paralele în figura 3.8 s-au considerat trei forțe paralele  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ ). Se cere

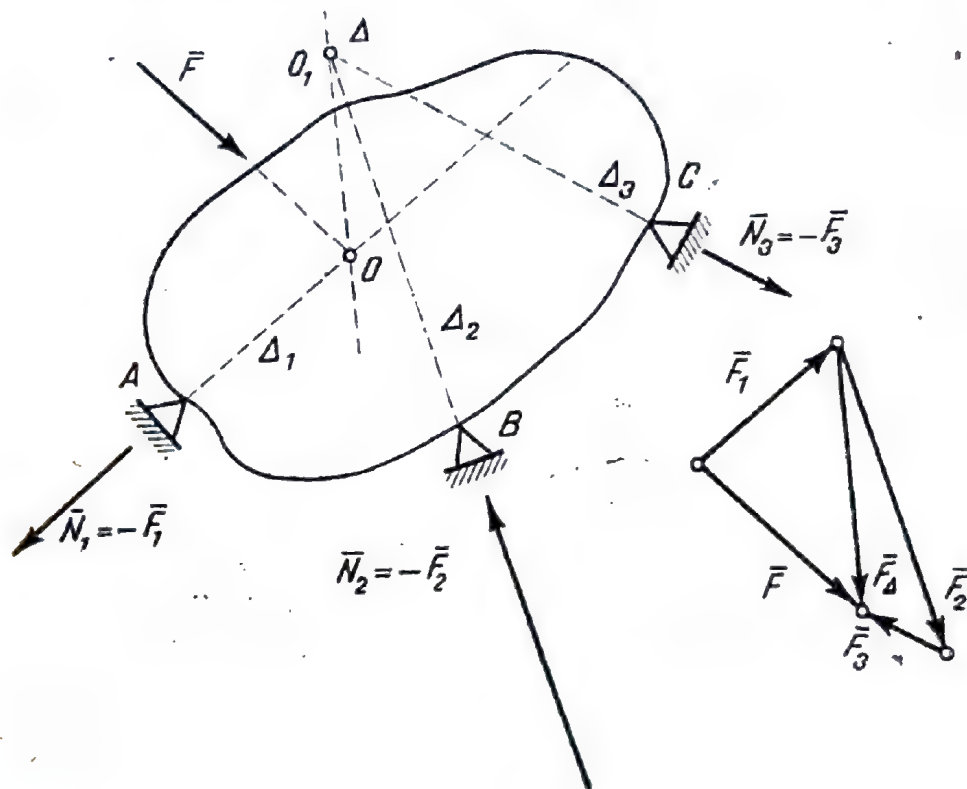


Fig. 3.7.

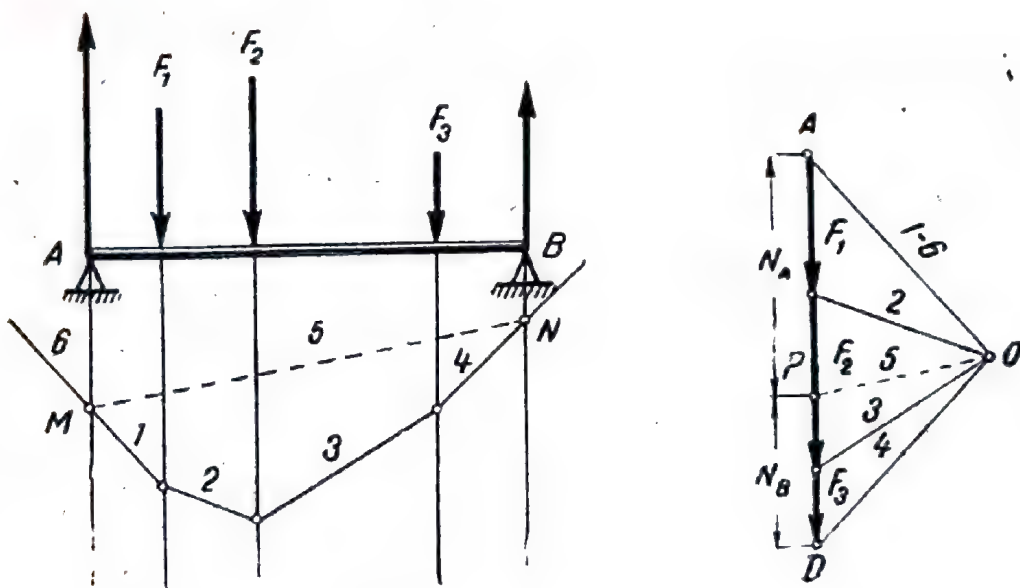


Fig. 3.8.



să se afle, pe cale grafică, reacțiunile  $\bar{N}_A$  și  $\bar{N}_B$  din cele două reazeme. Metoda grafică are la bază metoda reducerii sistemelor de forțe coplanare cu ajutorul poligonului forțelor și al poligonului funicular. Procedeu este următorul:

— se construiește poligonul forțelor date, care, din cauza paralelismului, are toate laturile în linie dreaptă; dintr-un pol arbitrar  $O$  se duc razele polare 1, 2, 3, 4;

— se construiește poligonul funicular 1, 2, 3, 4; laturile acestuia taie suporturile reacțiunilor în  $M$  și  $N$ ;

— prin punctul  $O$  se duce  $OP \parallel MN$ ; punctul  $P$  determină pe  $AD$  vectorii  $\overline{DP}$  și  $\overline{PA}$ , care reprezintă respectiv reacțiunile  $\bar{N}_B$  și  $\bar{N}_A$ .

Pentru justificarea construcției să considerăm sistemul forțelor  $F_1, F_2, F_3, \bar{N}_A, \bar{N}_B$ ; poligonul forțelor și poligonul funicular al acestui sistem se închide de la sine. Într-adevăr, poligonul forțelor este  $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}, \bar{N}_B, \bar{N}_A$  iar poligonul funicular are laturile 1, 2, 3, 4,  $NM$  și iarăși 6 care se suprapune cu 1.

## 6. Aplicarea metodelor analitică și grafică la studiul echilibrului sistemelor materiale libere și supuse la legături

a) **Echilibrul punctului material.** Sistemul forțelor care acționează punctul material, format din forțele exterioare date și din forțele de legătură, nu poate fi decît un sistem de forțe coliniare, concurente și coplanare sau concurente în spațiu. Ecuațiile de echilibru efective sînt cele din tabela 3.2, corespunzătoare acestor trei cazuri. Condițiile analitice de echilibru sînt deci în număr de una pentru cazul forțelor coliniare, două pentru cazul cînd forțele care acționează punctul formează un sistem de forțe concurente și coplanare, sau în număr de trei în cazul cînd forțele care acționează punctul formează un sistem de forțe concurente în spațiu. Cu ajutorul lor se determină poziția de echilibru a punctului considerat și valorile reacțiunilor.

Condiția grafică de echilibru este în ambele cazuri aceeași: poligonul forțelor trebuie să se închidă, adică forțele aplicate punctului să aibă rezultanta nulă. În primul caz, poligonul forțelor este situat pe o dreaptă; în cel de-al doilea, poligonul este situat în același plan, iar în cel de-al treilea caz, el este un poligon în spațiu.

b) **Echilibrul solidului rigid.** Sistemul forțelor care acționează un solid rigid, format din forțele exterioare date și din

forțele de legătură se poate afla în oricare din configurațiile arătate în tabela 3.2. Ecuațiile de echilibru efective diferă de la caz la caz după configurația sistemului de forțe care acționează solidul, așa cum se arată în aceeași tabelă, numărul lor variind între o ecuație, în cazul cînd solidul este acționat de un sistem de forțe coliniare, și șase ecuații, în cazul cînd solidul este acționat de un sistem de forțe oarecare în spațiu.

Cu ajutorul acestor ecuații se determină poziția de echilibru a solidului considerat și valorile reacțiunilor.

c) **Echilibrul sistemelor de solide rigide.** Sistemul forțelor care acționează un sistem de solide rigide și condițiile generale de echilibru ale acestor forțe sînt aceleași ca în cazul unui singur solid rigid.

Pornind de la axioma că *dacă un sistem de corpuri se află în echilibru fiecare corp al sistemului se află de asemenea în echilibru*, pentru studiul echilibrului unui sistem de corpuri solide rigide vom putea folosi una dintre următoarele trei metode:

- metoda echilibrului fiecărui corp în parte;
- metoda echilibrului părților;
- metoda echilibrului întregului sistem.

Pentru aplicarea primei metode, se izolează fiecare corp din sistem introducîndu-se forțele exterioare date și forțele de legătură, care reprezintă acțiunea celorlalte corpuri din sistem asupra corpului considerat (fig. 3.9, a); se scriu apoi condițiile de echilibru ale corpului respectiv. Această operație se repetă pentru fiecare dintre corpurile sistemului. Numărul ecuațiilor obținute este egal cu suma numărului de ecuații scrise pentru fiecare corp în parte.

Pentru aplicarea celei de-a doua metode, se împarte sistemul de corpuri în subsisteme compuse dintr-un număr oarecare de corpuri ale sistemului inițial și se introduc forțele exterioare aplicate fiecăruia dintre subsistemele în care s-a împărțit sistemul de corpuri dat inițial, precum și forțele de legătură provenind de la corpurile rămase în afara subsistemului cu al cărui echilibru ne ocupăm (fig. 3.9, b). Într-adevăr, după cum am văzut mai sus, forțele și cuplurile exercitate între corpurile sistemului, denumite forțe interioare, sînt două cîte două egale și direct opuse și deci se anulează. Se scriu apoi condițiile de echilibru ale subsistemului respectiv.

Această operație se repetă pentru fiecare dintre subsistemele care alcătuiesc sistemul inițial. Numărul ecuațiilor obținute este egal cu suma numărului de ecuații scrise pentru fiecare subsistem în parte.



La aplicarea celei de-a treia metode, sistemul de corpuri dat se consideră ca un singur corp (fig. 3.9, c). Se introduc forțele exterioare date și forțele de legătură cu mediul înconjurător și se scriu condițiile de echilibru ale sistemului respectiv.

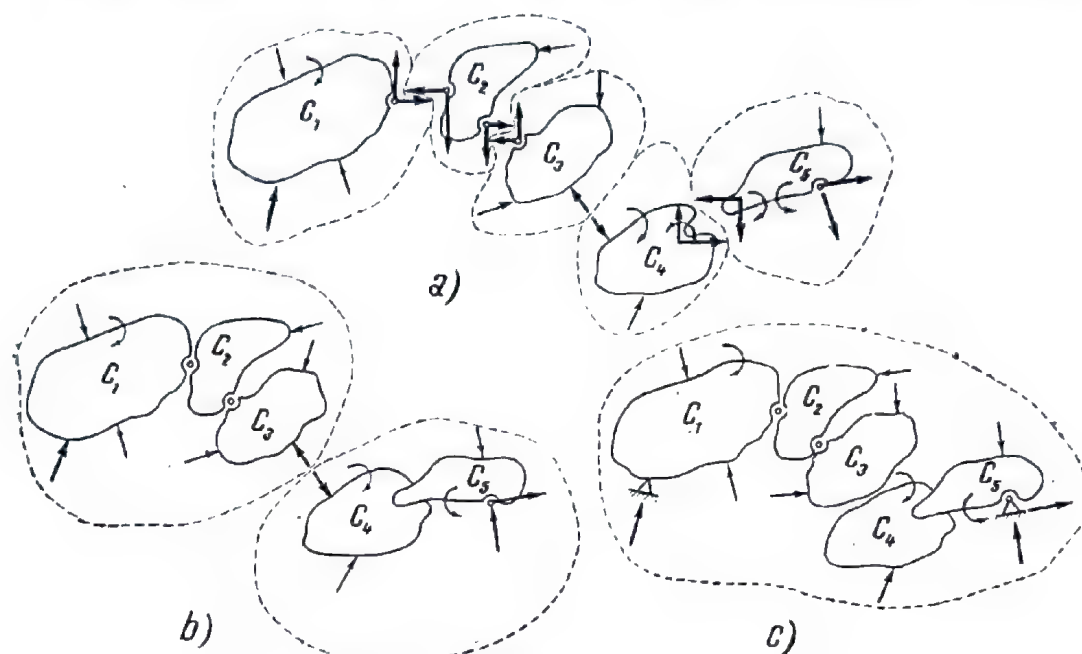


Fig. 3.9.

Trebuie observat că ecuațiile de echilibru scrise la această metodă reprezintă *condiții necesare* de echilibru, dar nu și suficiente. Într-adevăr, dacă vom considera sistemul celor două

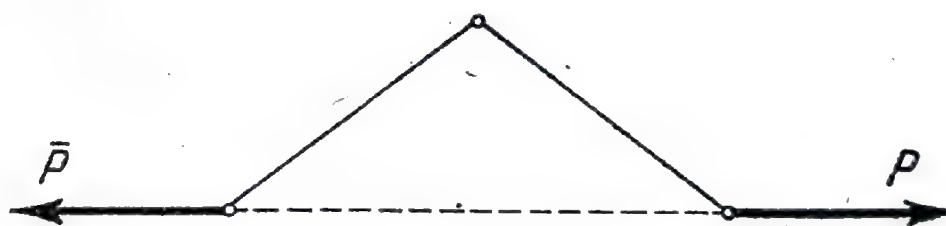


Fig. 3.10.

bare articulate din figura 3.10 acționate de forțele egale și direct opuse de modul  $P$ , cu toate că aceste forțe își fac echilibru, sistemul de corpuri se pune în mișcare.

Cu ajutorul ecuațiilor scrise la fiecare dintre cele trei metode arătate, se determină poziția de echilibru a sistemului și valorile reacțiunilor.

Condițiile de echilibru grafic sînt aceleași ca în cazul unui singur solid rigid.

## 7. Freecări ; echilibrul cu freecare

a) **Freecarea de alunecare.** În toate problemele de echilibrul punctului material și solidului rigid în care a intervenit reze-marea unui corp pe altul, am presupus că cele două suprafețe în contact sînt perfect lucioase și că reazemul împiedică depla-sarea corpului rezemat numai pe direcția normalei comune la cele două suprafețe în contact în punctul de rezezare. De aci rezultă că corpul rezemat se poate mișca în orice direcție tan-gentă celor două suprafețe de rezezare în punctul de contact fără să întîmpine vreo opunere într-una din aceste direcții. Din acest motiv, reazemul a fost înlocuit în toate aceste pro-bleme printr-o singură reacțiune normală.

Modul acesta de a privi lucrurile constituie o simplificare în raport cu fenomenul real. Ne este cunoscut din practică faptul că oricît de fin am prelucra o suprafață, ea prezintă to-tuși o serie de asperități invizibile cu ochiul liber, dar care apar imediat ce privim suprafața respectivă cu un aparat optic. În timpul rezezării, asperitățile reazemului se întrepătrund cu asperitățile corpului care se rezează, dînd naștere la forțe situate în planul tangent suprafeței de contact, care sînt denumite, din acest motiv, *reacțiuni tangențiale* sau *forțe de freecare*.

Să arătăm existența acestor forțe printr-o experiență sim-plă. Pe o masă orizontală așezăm un corp  $C$  de greutate  $G$

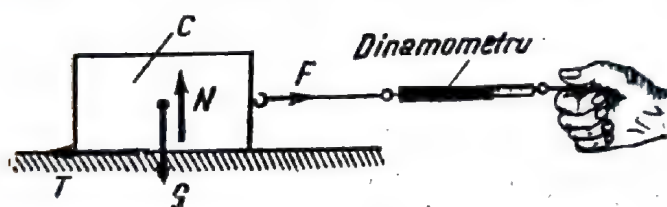


Fig. 3.11.

(fig. 3.11). El va rămîne în echilibru sub acțiu-ne a forței de gravitație  $G$  și a reacțiunii norma-le  $N$ . Să legăm corpul într-un punct foarte apropiat de bază cu un fir, de care să tragem

paralel cu masa. Dacă nu ar exista nici o forță care să se opună mișcării corpului  $C$  în planul mesei, adică dacă legătura de reze-mare corp-masă ar fi lucie, atunci imediat ce am trage de sfoară, cu cea mai mică forță, corpul s-ar pune în mișcare. În realitate observăm însă că, deși tragem de fir cu o forță nu prea mare, totuși corpul rămîne în repaus. Acesta înseamnă că între suprafața de contact a corpului cu masa a luat naștere o forță  $T$  care se opune acțiunii forței cu care tragem de fir, și anume ea este egală și de sens opus acesteia. Măsurarea forței cu care tragem se poate efectua intercalînd pe firul de care tragem un dinamometru cu arc.



Să tragem acum cu o forță mai mare de fir; observăm că corpul rămîne încă în repaus. Aceasta înseamnă că valoarea forței de frecare s-a schimbat, și anume ea a crescut, pentru a echilibra noua valoare a forței cu care tragem.

Dacă mărim din ce în ce forța din fir, forța de frecare va crește și ea pînă la un anumit moment, cînd corpul se va pune în mișcare. Aceasta înseamnă că forța de frecare nu poate crește neconținut; această creștere are o limită care, o dată depășită, face ca forța din fir să fie mai mare decît forța de frecare și corpul să se pună în mișcare în direcția firului. De aci tragem concluzia că corpul va rămîne în repaus atîta timp cît forța de frecare va avea orice valoare între zero și valoarea sa maximă.

Între aceste două valori corpul rămîne în repaus, frecarea fiind în acest caz o *frecare statică*. Din momentul în care începe să se miște, corpul continuă totuși să întîmpine rezistența datorită frecării; această rezistență este denumită *frecare dinamică* și ea este în general mai mică decît frecarea statică.

Expresia forței de frecare și legile fenomenului frecării au fost stabilite pe cale experimentală de către fizicianul francez Coulomb (1736—1806); ele sînt următoarele:

— Modulul forței de frecare maxime este proporțional cu modulul reacțiunii normale; coeficientul de proporționalitate se numește coeficient de frecare de alunecare:

$$T_{max} = \mu N. \quad (3.2)$$

Cu aceasta, forța de frecare este determinată ca vector astfel:

— modulul  $T_{max} = \mu N$  pentru forța de frecare maximă, iar pentru cazul cînd nu se atinge această valoare, modulul său are o valoare nedeterminată între zero și  $\mu N$  ( $0 \leq T \leq \mu N$ );

— direcția aceeași ca a tendinței de deplasare a corpului respectiv (situată în planul tangent în punctul de contact al suprafețelor);

— sensul invers sensului deplasării;

— punctul de aplicație în punctul de contact al corpurilor.

Faptul că modulul forței de frecare este proporțional cu reacțiunea normală se poate verifica ușor, cum se arată în figura 3.12. În primul caz, (fig. 3.12, a), reacțiunea normală are valoarea  $N = P$  și forța necesară punerii corpului în mișcare

este  $F$ ; în cel de-al doilea caz (fig. 3.12, *b*), reacțiunea normală este  $N_1 = 2P$ , iar forța necesară punerii corpului în mișcare este  $F_1$ . Se constată experimental că :

$$\frac{F}{N} = \frac{F_1}{N_1},$$

adică :

$$\frac{F}{P} = \frac{F_1}{2P} ; F_1 = 2F.$$

— Coeficientul de frecare  $\mu$  nu depinde de forma și mărimea suprafeței în contact (adică de presiunea dintre cele două corpuri).

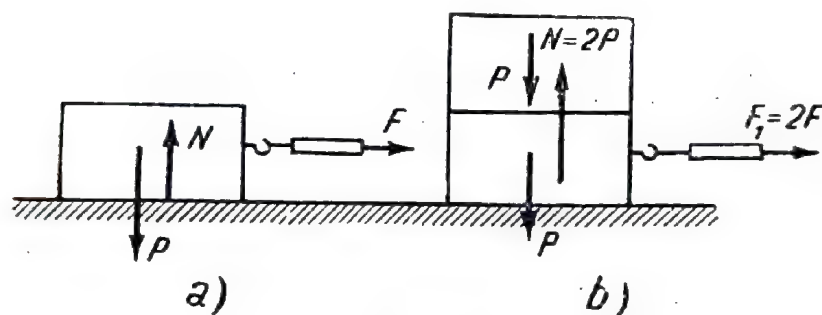


Fig. 3.12.

Această lege poate fi verificată ușor așezînd același corp în două poziții, ca în figura 3.13, pe două suprafețe de contact diferite pe o aceeași masă. În ambele cazuri, forța care pune în mișcare corpul este aceeași.

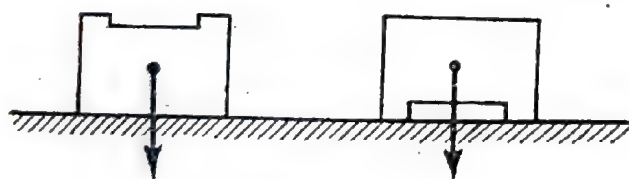


Fig. 3.13.

— Coeficientul de frecare  $\mu$  depinde de natura materialelor în contact (felul materialului și gra-

dul său de prelucrare). Și această lege poate fi verificată experimental făcînd încercări cu corpuri de forme și greutăți egale, dar construite din materiale diferite, variînd eventual și materialul mesei sau rugozitatea suprafețelor în contact; se constată cu această ocazie că forța de frecare  $T_{max}$  este variabilă de la un caz la altul, depinzînd de felul materialului și de calitatea suprafețelor în contact.



Coeficientul de frecare este un număr fără dimensiuni, iar valoarea sa scade foarte repede dacă între suprafețele aflate în contact se interpune un strat de lubrifiant. Aceste valori stabilite experimental se găsesc în tabele; câteva valori sînt arătate în tabela 3.3.

Tabela 3.3

Valorile coeficientului de frecare  $\mu$ 

Natura corpurilor	Starea suprafețelor	Coeficientul $\mu$	Observații
Oțel pe oțel	$\left\{ \begin{array}{l} \text{unse cu seu} \\ \text{unse cu ulei} \\ \text{uscate} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0,07 \\ 0,15 \\ 0,22-0,25 \end{array}$	coeficient de aderență (la pornire)
Bronz pe bronz	puțin unse	0,20	
Bronz pe fontă	puțin unse	0,21	
Fontă pe fontă sau bronz	$\left\{ \begin{array}{l} \text{puțin unse} \\ \text{cu apă} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0,15 \\ 0,31 \end{array}$	
Oțel pe gheață	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0,014 \\ 0,027 \end{array}$	coeficient de aderență
Stejar pe stejar (uscat)	$\left\{ \begin{array}{l} \text{în lungul fibrelor} \\ \text{normal de fibre} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0,48 \\ 0,34 \end{array}$	
Curea de piele pe tambur de stejar	$\left\{ \begin{array}{l} \text{uscale} \\ \text{puțin unse} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0,27 \\ 0,47 \end{array}$	depinde de viteză
Curea de piele pe fontă	$\left\{ \begin{array}{l} \text{puțin unse} \\ \text{cu apă} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0,28 \\ 0,36 \end{array}$	

Datorită existenței forței de frecare  $\bar{T}$ , reacțiunea totală  $\bar{R}$  a unui reazem se obține compunînd după regula paralelogramului forțele  $\bar{T}$  și  $\bar{N}$  (fig. 3.14). Din această figură se vede că reacțiunea  $\bar{R}$  este înclinată față de normala cu un unghi  $\varphi$  dat de relația :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T}{N}.$$

❗ Dacă considerăm valoarea maximă a forței de frecare vom avea :

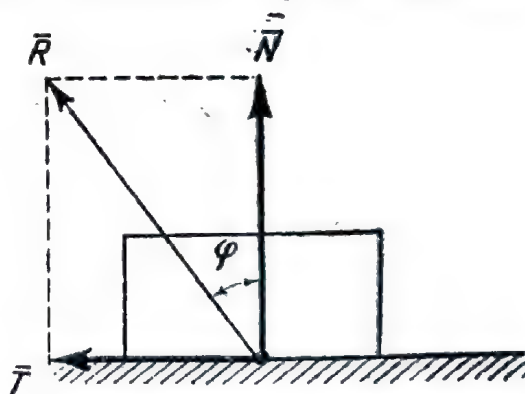


Fig. 3.14.

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = \frac{T_{\max}}{N} = \frac{\mu N}{N} = \mu. \quad (3.3)$$

Rezultă de aci că unghiul maxim de înclinare al reacțiunii totale  $\bar{R}$  față de normala comună în punctul de rezemare este acel unghi a cărui tangentă este egală cu coeficientul de frecare; acest unghi este denumit *unghi de frecare*.

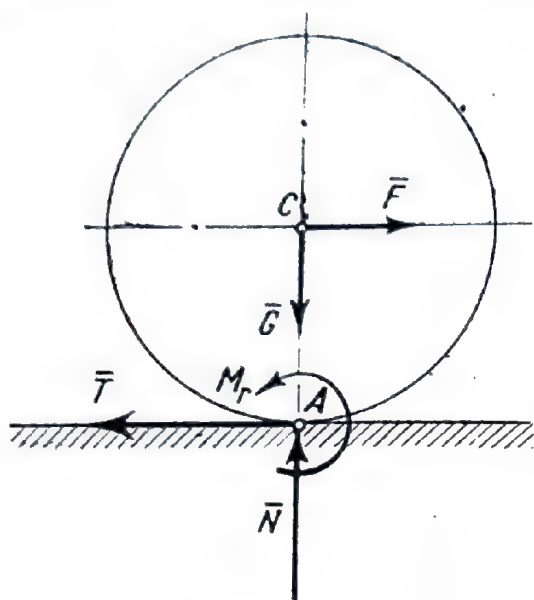


Fig. 3.15.

Situația pentru care forța de frecare își atinge valoarea sa maximă sau pentru care reacțiunea totală  $\bar{R}$  se înclină cu unghiul maxim este denumită *echilibru la limita de alunecare*, spre deosebire de situația pentru care forța de frecare are o valoare cuprinsă între zero și valoarea sa maximă, denumită *echilibru sub limita de alunecare*.

#### b) Frecarea de rostogolire.

Să examinăm acum mișcarea de rostogolire a unui corp pe altul. Pentru simplificare, vom considera cazul unui cilindru cir-

cular drept, care se rostogolește pe un plan orizontal (fig. 3.15).

Asupra acestui cilindru acționează următoarele forțe :

- greutatea  $\bar{G}$  a cilindrului, aplicată în punctul C ;
- reacțiunea normală  $\bar{N}$  aplicată în punctul A de contact al cilindrului cu planul orizontal ;
- forța  $\bar{F}$ , aplicată în centrul roții, care tinde să deplaseze roata spre dreapta ;
- forța de frecare  $\bar{T}$ , îndreptată invers tendinței de alunecare a cilindrului în punctul A.

Să scriem ecuația de momente în raport cu punctul A : obținem :

$$FR = 0.$$

Cum  $R \neq 0$ , rezultă că pentru echilibrul cilindrului trebuie ca  $F = 0$ . Acest rezultat contrazice experiența, întrucât ne este cunoscut faptul că pentru o forță  $\bar{F}$  diferită de zero, dar nu prea mare, cilindrul rămîne în echilibru. Dacă analizăm mai îndeaproape cărui fapt se datorește această neconcordanță dintre teorie și practică, vom constata că contactul dintre cele două



corpuri nu se efectuează într-un singur punct, ci pe o suprafață  $AA'$  (fig. 3.16, a). Atît această suprafață cît și corpul însuși nu sînt două corpuri rigide, ci ele se deformează, astfel încît în timpul rostogolirii punctele 1, 2, 3, 4, 5, de pe corpul  $C_1$  nu mai vin în contact cu punctele corespunzătoare  $1', 2', 3', 4', 5'$  de pe planul de rezemare (fig. 3.16, a), ci corpul  $C_2$  suferă o întindere, materialul acumulîndu-se în fața cilindrului sub forma unei movile. Reacțiunile exercitate în punctele de contact formează un sistem de forțe paralele, a căror rezultantă nu mai are suportul pe dreapta  $n-n$ , ci este deplasat față de aceasta cu distanța  $s$  denumită *coeficient de frecare de rostogolire* (fig. 3.16, b). Dacă reducem forța  $\bar{N}$  pe direcția  $n-n$ , va trebui să introducem un cuplu denumit *cuplul frecării de rostogolire*, al cărui moment este (fig. 3.16, c) :

$$M_r = Ns. \quad (3.4)$$

Ca și în cazul frecării de alunecare, se constată experimental că cilindrul rămîne în echilibru atîta timp cît momentul frecării de rostogolire nu depășește valoarea  $Ns$ , adică :

$$0 \leq M_r \leq Ns.$$

Coeficientul frecării de rostogolire  $s$  reprezintă o distanță și în consecință se măsoară în unități de lungime (de exemplu în centimetri). Valoarea sa depinde, la fel ca și coeficientul  $\mu$ , de

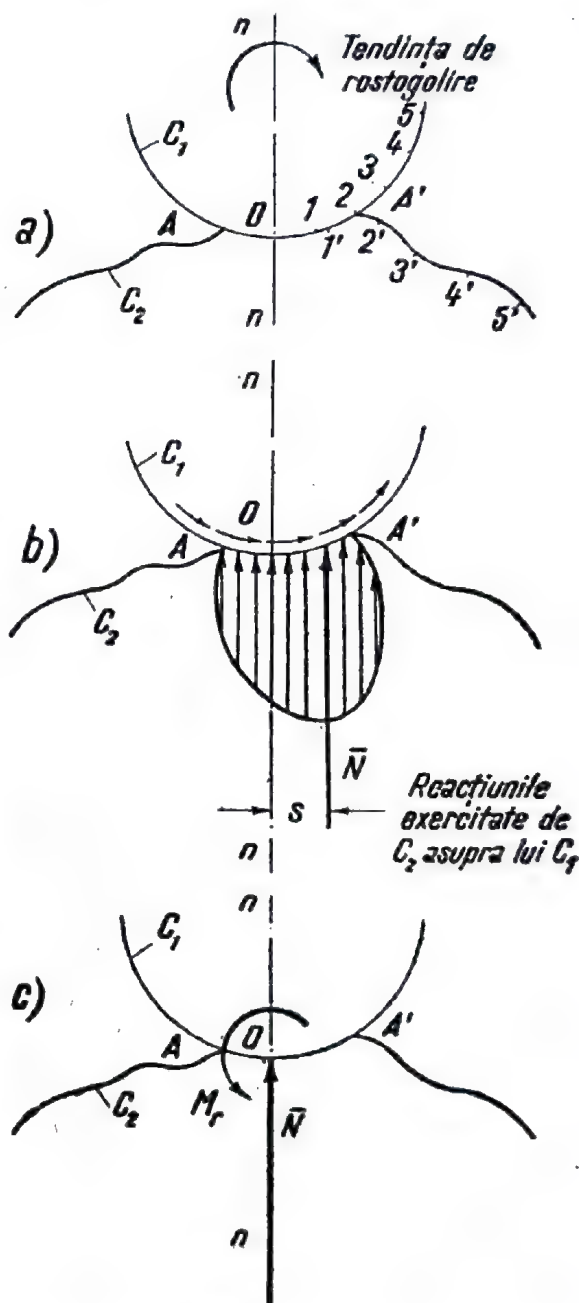


Fig. 3.16.

Tabela 3.4  
Valorile coeficientului de frecare  
de rostogolire

Natura suprafețelor	$s$ (mm)
Oțel pe oțel	0,05
Fontă pe lemn	0,46
Lemn tare pe lemn	0,5
Roți de vagoane pe șine	0,5 — 1
Roată de cauciuc pe beton	3,15

natura și calitatea suprafețelor în contact și se stabilește pe cale experimentală, pentru diferite perechi de materiale în contact. Cîteva valori ale acestui coeficient sînt redată în tabela 3.4.

Să scriem acum ecuațiile de echilibru ale roții ; avem :

$$\begin{aligned}(\Sigma F_x = 0) \quad & -T + F = 0 \\(\Sigma F_y = 0) \quad & N - G = 0 \\(\Sigma M_A = 0) \quad & FR - M_r = 0.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Valorile maxime ale forței de frecare de alunecare și ale momentului frecării de rostogolire sînt :

$$\begin{aligned}T_{max} &= \mu N = \mu G, \\M_{max} &= sN = sG,\end{aligned}$$

deoarece  $N = G$ , în baza celei de-a doua ecuații a sistemului (3.5).

Să presupunem că, pornind din repaus, aplicăm cilindrului forțe  $\overline{F}$  din ce în ce mai mari ; ne întrebăm cum va începe discul să se miște în momentul în care forțele care-i sînt aplicate nu-și mai fac echilibru ; se pot ivi următoarele cazuri :

— pentru ca să nu existe nici alunecare, nici rostogolire, deci pentru ca discul să rămînă în repaus, trebuie ca :

$$\begin{aligned}T &\leq T_{max}, \\M_r &\leq M_{max}.\end{aligned}$$

În baza primei și ultimei ecuații a sistemului (3.5) rezultă ::

$$\begin{aligned}F &\leq \mu G, \\F &\leq \frac{sG}{R},\end{aligned}$$

ceea ce revine la a spune că forța  $F$  trebuie să fie mai mică decît cea mai mică dintre cantitățile  $\mu G$  și  $sG/R$  ;



— pentru ca cilindrul să înceapă să se rostogolească fără să alunece, va trebui ca :

$$F \leq \mu G,$$

$$F > \frac{sG}{R}$$

sau

$$\frac{sG}{R} < F \leq \mu G;$$

— pentru ca cilindrul să înceapă să alunece fără a se rostogoli, trebuie ca :

$$\mu G < F \leq \frac{sG}{R}.$$

Dacă cilindrul din acest exemplu este o roată avînd greutatea  $G = 250$  kgf, raza  $r = 50$  cm, coeficientul de frecare de alunecare  $\mu = 0,1$  și coeficientul de frecare de rostogolire  $s = 0,8$  cm, obținem :

$$\mu G = 0,1 \times 250 = 25 \text{ kgf},$$

$$\frac{sG}{R} = \frac{0,8 \times 250}{50} = 4 \text{ kgf}.$$

Rezultă că mărind din ce în ce forța  $\overline{F}$  roata va începe să se rostogolească fără să alunece pentru valori ale forței  $F$  cuprinse între :

$$4 < F \leq 25 \text{ kgf}.$$

**Observație.** În general, valoarea  $\frac{sG}{R}$  este mult mai mică decît valoarea  $\mu G$ , ceea ce justifică înlocuirea frecării de alunecare cu cea de rostogolire. De aceea se folosesc spre exemplu, în locul lagărelor de alunecare, lagăre de rostogolire, la care se introduce între axă și lagăr un organ denumit *rulment*, prevăzut cu role (cilindrice sau conice) sau cu bile sferice. În acest mod, mișcarea de alunecare a fusului în lagăr este înlocuită cu o mișcare de rostogolire, fapt care reduce foarte mult rezistența provenită din frecare (fig. 3.17, *a*, *b* și *c*).

În același scop se folosesc și galeții conici la plăcile turnante utilizate în transporturi (fig. 3.18, *a*), sau bilele sferice la

ușile sau porțile alunecătoare (fig. 3.18, *b*), sau rulourile în cazul transportoarelor de materiale din uzine (fig. 3.18, *c*).

c) **Frecări în lagăre și articulații.** Aceste frecări iau naștere între axa care se rotește și cuzinetul lagărului. Să analizăm modul în care se produce această frecare.

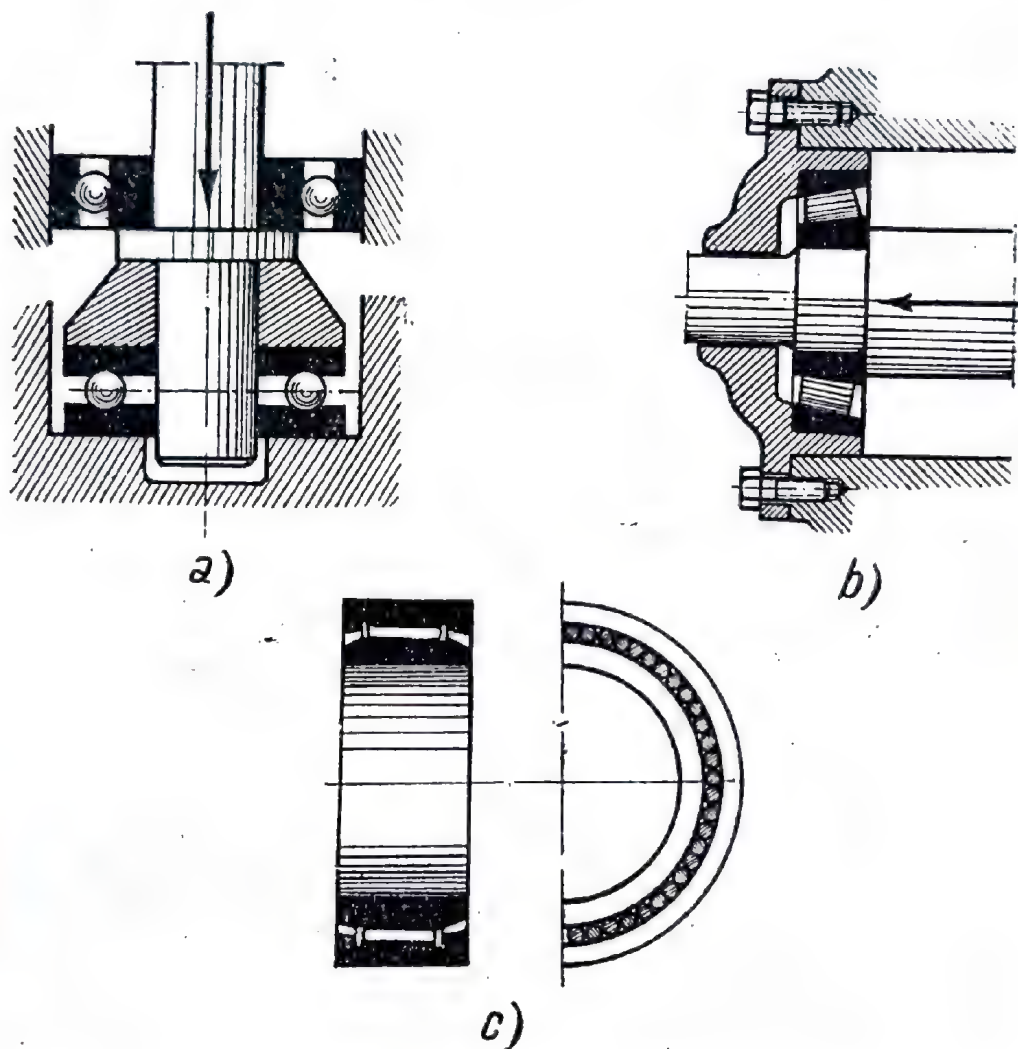


Fig. 3.17.

Figura 3.19, *a* reprezintă un disc de greutate  $P$  și rază  $r$  aflat în echilibru sub acțiunea acestei greutate și a reacțiunii normale  $N$  din punctul de rezemare  $C$  în interiorul unei cavități de formă circulară, avînd un diametru puțin mai mare decît diametrul discului. Acesta este cazul rezemării unui fus pe cuzinetul lagărului.

Să aplicăm discului un cuplu exterior de moment  $M$ ; el se va urca pe peretele locașului său circular cu distanța  $CC'$  (fig. 3.19, *b*). Elementele de reducere a forțelor de frecare sînt: cuplul de moment  $M$ , și forța de frecare  $T$ .



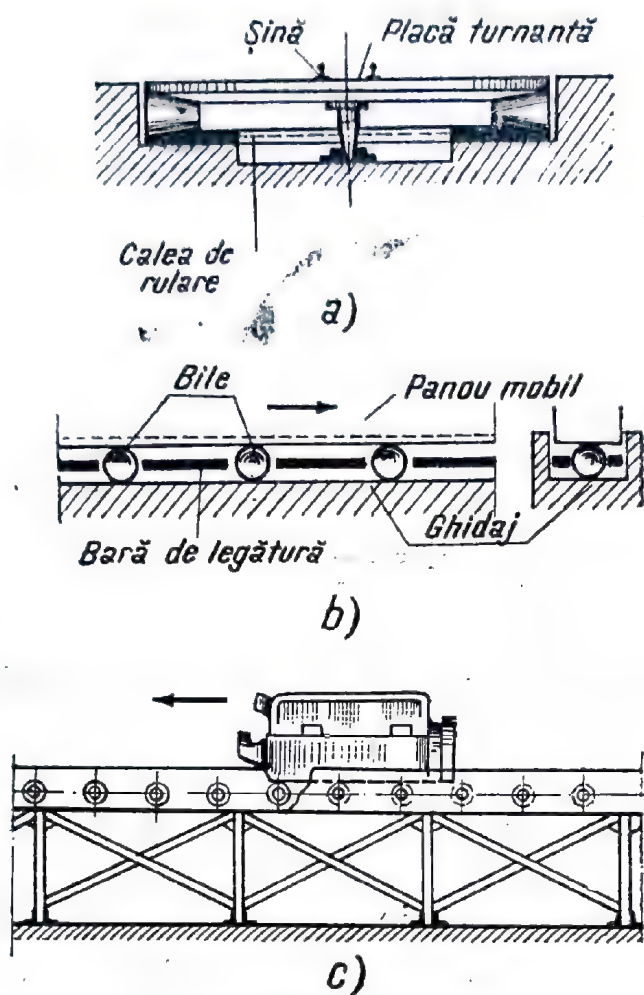


Fig. 3.18.

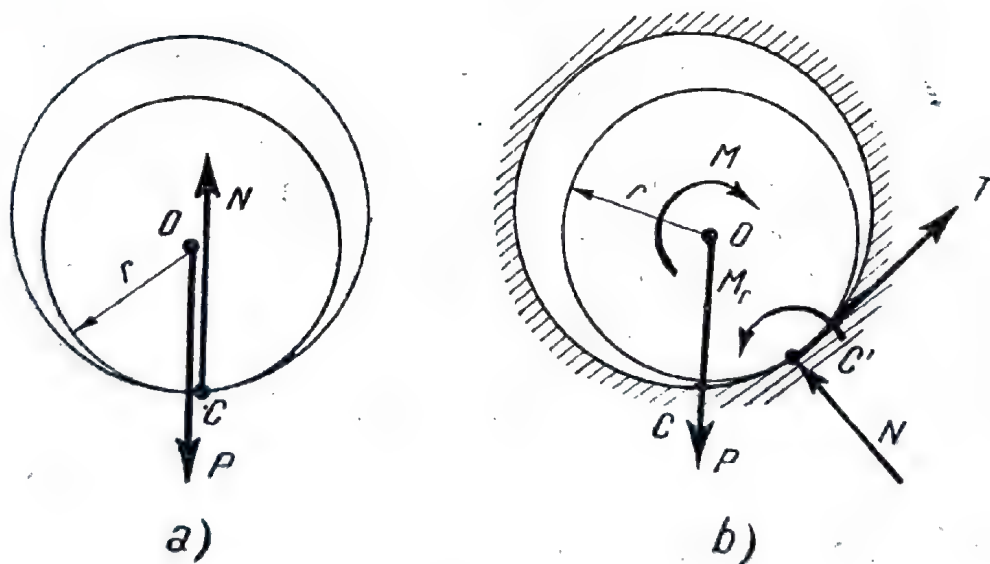


Fig. 3.19.

Să scriem acum ecuația de echilibru a momentelor în raport cu centrul  $O$  al discului; avem :

$$(\sum M_O = 0), \quad M - M_r - Tr = 0.$$

Ultimii doi termeni ai acestei ecuații reprezintă momentul total al forțelor de frecare ; admițând că ambele frecări au atins valorile maxime avem :

$$M_f = M_r + Tr = sN + \mu Nr = N(s + \mu r) = Nr \left( \frac{s}{r} + \mu \right) = \mu' r N$$

Coeficientul  $\mu'$  se numește *coeficient de frecare în articulație*. El se deduce fie prin calcul din relația :

$$\mu' = \frac{s}{r} + \mu, \quad (3.6)$$

fie direct pe cale experimentală.

d) **Frecarea de pivotare.** Să considerăm un arbore care reazemă într-una dintre extremitățile sale pe o suprafață, ca

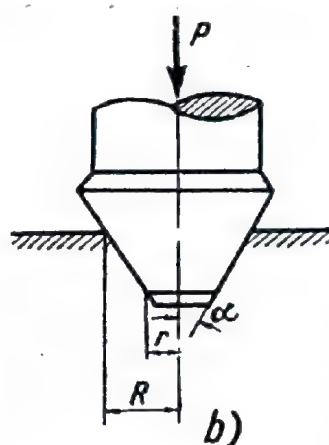
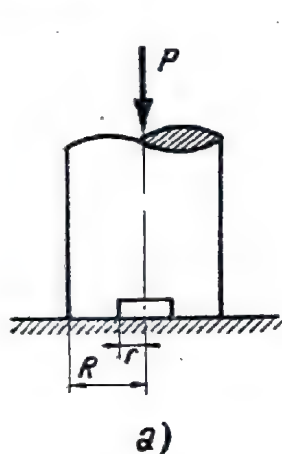


Fig. 3.20.

în figura 3.20. În tehnică, această legătură poartă denumirea de *pivot*. Rezemarea se poate face pe o suprafață plană (fig. 3.20, a), conică (fig. 3.20, b) sau sferică. Aceste suprafețe trebuie să fie de revoluție în jurul axei arborelui pentru a permite mișcarea de rotație a acestuia.

Dacă notăm cu  $P$  forța axială care apasă arborele, se demonstrează că atunci când arborele este pus în mișcare prin acțiunea unui cuplu exterior de moment  $M$ , forțele de frecare de alunecare ce iau naștere în toate punctele de contact ale arborelui cu lagărul sau în raport cu axa arborelui dau un moment total, a cărui valoare este :

$$M_f = \mu k P, \quad (3.7)$$

în care mărimea  $k$  are dimensiunea unei lungimi. Ea are diferite expresii după forma pivotului, după cum se arată în tabela 3.5.



Frecarea de pivotare are multe aplicații în tehnică; ea apare la rezemarea unui arbore care în timp ce se mișcă suportă presiuni axiale (fig. 3.21) sau la ambreiajele progresive cu con (fig. 3.22, a) sau disc (fig. 3.22, b), folosite în mașinile de transport.

e) **Frecarea firelor, cablurilor și benzilor.** În tehnică se întâlnesc adesea situații în care un fir (cable sau bandă) este trecut peste o piesă de formă cilindrică (scripete, tobă, tambur) astfel încât fie că cilindrul de înfășurare este fix și firul poate avea o mișcare relativă față de el, fie că firul este fix și cilindrul de înfășurare este mobil, fie că, în sfârșit, atât firul cât și cilindrul se află în mișcare, forțele aplicate fiind de așa natură încât între fir și cilindru poate lua naștere

Tabela 3.5

Coeficientul frecării de pivotare

Pivotul	Valoarea lui $k$
Plan	$\frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$
Conic	$\frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$

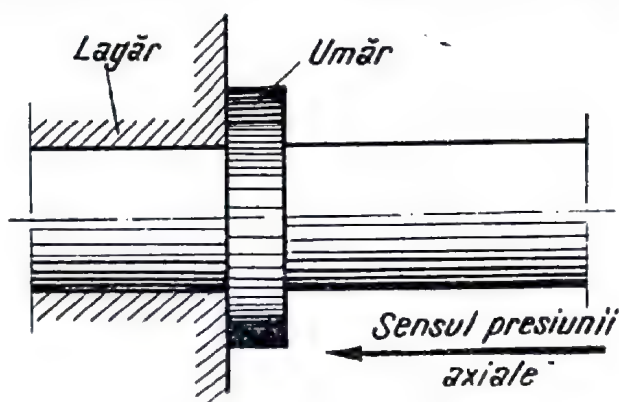


Fig. 3.21.

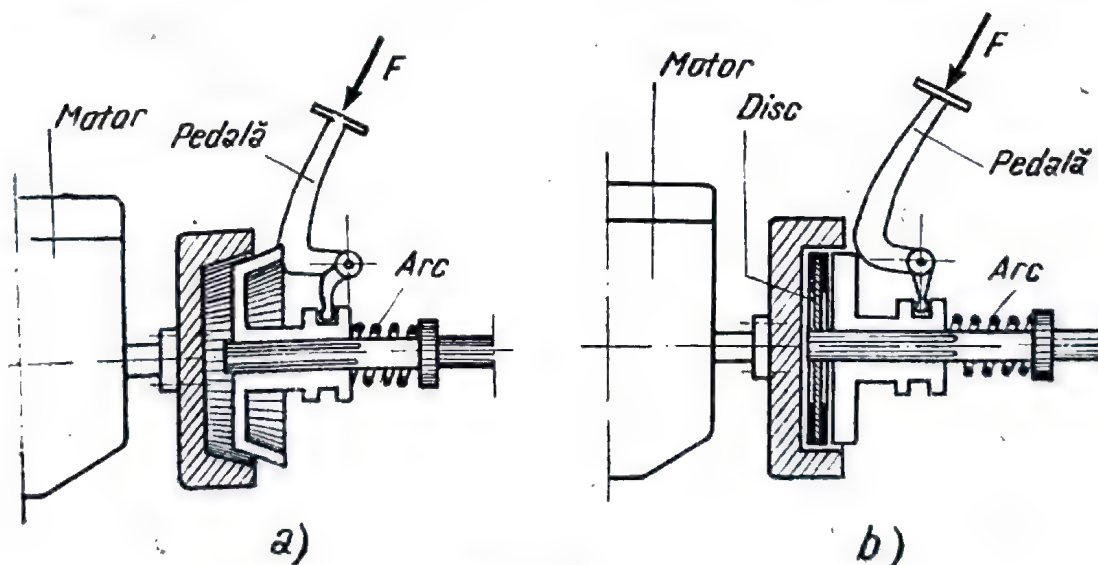


Fig. 3.22.

tere o mișcare relativă. În toate aceste situații, după cum rezultă din experiență, tensiunile la capetele celor două fire nu sînt egale; diferența dintre ele este produsă de forțele de frecare ce iau naștere în punctele de contact ale firului cu cilindrul. În cele ce urmează ne propunem să găsim relația dintre tensiunile care apar la cele două extremități ale firului. Pentru aceasta,

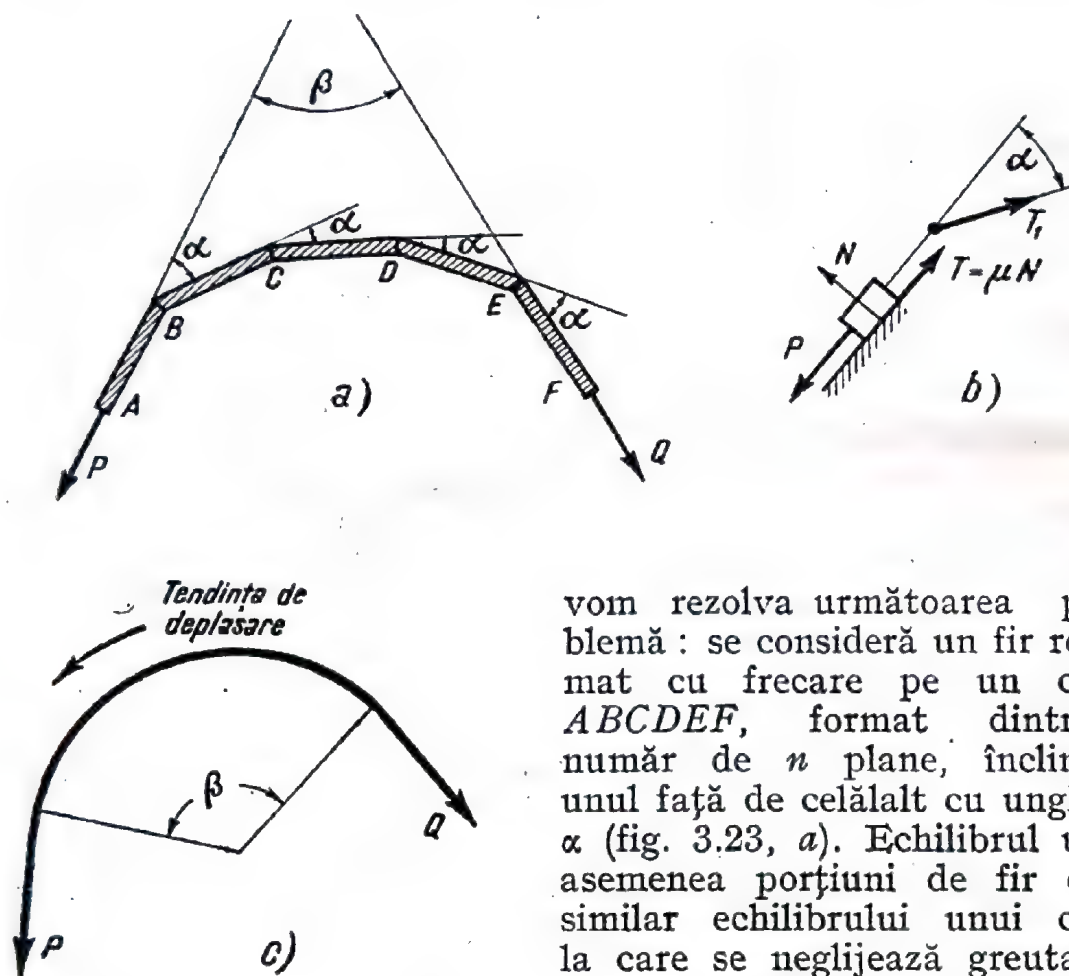


Fig. 3.23.

vom rezolva următoarea problemă : se consideră un fir reze-mat cu frecare pe un corp  $ABCDEF$ , format dintr-un număr de  $n$  plane, înclinate unul față de celălalt cu unghiul  $\alpha$  (fig. 3.23,  $a$ ). Echilibrul unei asemenea porțiuni de fir este similar echilibrului unui corp la care se neglijează greutatea și care este acționat de forțele din figura 3.23,  $b$  : tensiunile  $P$  și  $T_1$ , reacțiunea normală  $N$  și forța de frecare  $T = \mu N$ . Din ecua-țiile de echilibru deducem :

și  $T_1$ , reacțiunea normală  $N$  și forța de frecare  $T = \mu N$ . Din ecua-țiile de echilibru deducem :

$$(\sum_{ix} = 0) - P + \mu N + T_1 \cos \alpha = 0,$$

$$(\sum_{iy} = 0) (N - T_1 \sin \alpha = 0)$$

Eliminînd reacțiunea normală  $N$  obținem :

$$P = T_1 (\cos \alpha + \mu \sin \alpha). \quad (3.8)$$



Pentru cea de-a doua porțiune, locul lui  $P$  îl ia  $T_1$ , iar locul lui  $T_1$  îl ia  $T_2$ , deci :

$$T_1 = T_2 (\cos \alpha + \mu \sin \alpha).$$

Procedînd în același mod și pentru restul porțiunilor, avem :

$$T_2 = T_3 (\cos \alpha + \mu \sin \alpha),$$

$$T_{n-1} = Q (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)$$

Înlocuind din aproape în aproape pe  $T_{n-1}$ ,  $T_{n-2}$ , ...,  $T_2, T_1$  obținem :

$$P = Q (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^n. \quad (3.9)$$

Să presupunem acum că curba  $ABCDEF$  tinde către un cerc (fig. 3.23, c) ; în acest caz numărul  $n$  al porțiunilor tinde către infinit, în timp ce unghiul  $\alpha$  se micșorează tinzînd către zero. Deoarece unghiul  $\alpha$  devine foarte mic vom putea pune în expresia (3.9)  $\cos \alpha \approx 1$  și  $\sin \alpha \approx \alpha = \frac{\beta}{n}$ ,  $\beta$  fiind unghiul laturilor extreme ; rezultă :

$$P = Q \left( 1 + \mu \frac{\beta}{n} \right)^n. \quad (3.10)$$

În cazul cercului, vom avea :

$$P = Q \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\mu \beta}{n} \right)^n.$$

Se știe că :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x,$$

deci în cazul nostru vom avea :

$$P = Q e^{\mu \beta}. \quad (3.11)$$

Dacă avem celălalt sens de mișcare rezultă :

$$Q = P e^{\mu \beta}. \quad (3.12)$$

Reunind între ele aceste două formule obținem limitele de variație ale raportului  $\frac{P}{Q}$  al tensiunilor extreme :

$$e^{-\mu \beta} \leq \frac{P}{Q} \leq e^{\mu \beta}. \quad (3.13)$$

Valorile expresiei  $e^{\mu\beta}$  se găsesc în tabele pentru diferite valori ale lui  $\mu$  și  $\beta$ .

Frecarea firelor, benzilor și cablurilor intervine adesea în tehnică; astfel, marinarul poate reține cu o forță  $\bar{P}$  foarte mică un vas care acționează la cealaltă extremitate a firului cu o forță  $\bar{Q}$  mult mai mare decât  $\bar{P}$  înfășurînd cablul de mai multe ori pe bornă (fig. 3.24). Frîna cu cablu (fig. 3.25, a) și frînele cu segmenti ale autovehiculelor (fig. 3.25, b) funcționează pe baza frecării firelor.

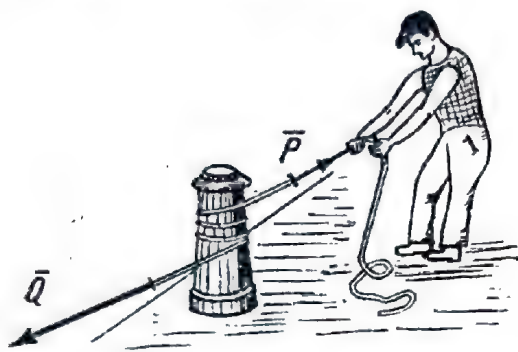
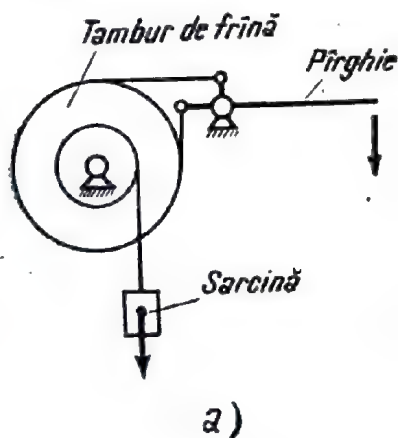


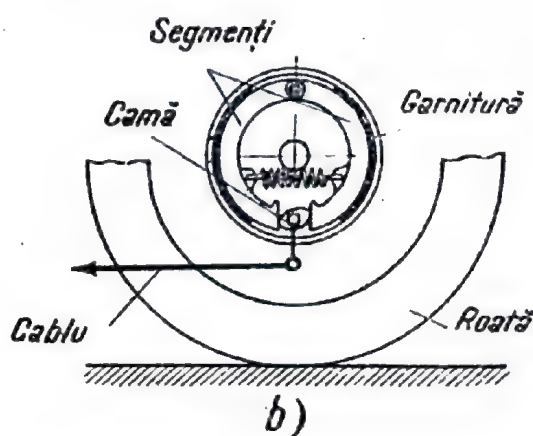
Fig. 3.24.

Într-adevăr, datorită frecărilor, o bună parte din energia consumată de mașini se pierde în lucrul mecanic pentru învingerea lor, lucru mecanic care fie că se transformă în căl-

După cum am văzut din exemplele de mai sus, frecările au o deosebită importanță în tehnică, atât prin efectul lor dăunător cît și datorită laturii pozitive a acțiunii lor.



a)



b)

Fig. 3.25.

dură ridicînd temperatura pieselor în mișcare, fie că produce uzura suprafețelor în contact. În figura 3.26 sînt arătate cîteva surse de frecare în organele mobile ale unei mașini cu abur.

Pentru atenuarea frecărilor, suprafețele în contact se ung cu *unsori* sau *lubrifianți*.

Pe de altă parte, frecările joacă și un rol pozitiv; astfel, fără frecare, rostogolirea roților vehiculelor, rezemarea unei scări pe perete și podea, autofrînarea unui șurub care rămîne fixat în locașul său ar fi imposibile. O serie de dispozitive și



organe de mașini, cum ar fi: transmisiile prin fricțiune, transmisiile cu curele, laminoarele, cleștii de apucat ș.a., își bazează funcționarea tocmai pe acțiunea forțelor de frecare. De asemenea, funcționarea frânelor ar deveni imposibilă fără acțiunea frecării, fapt care ar exclude folosirea acestor organe de mașini

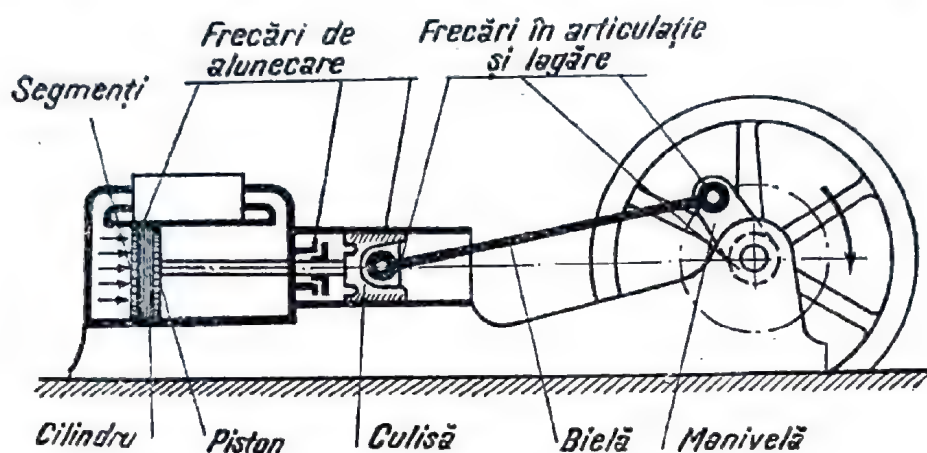


Fig. 3.26.

atât de importante pentru siguranța funcționării și protecția muncii celor ce deservesc mașinile.

f) **Rezolvarea problemelor de echilibru cu frecare.** Apariția forțelor de frecare nu modifică în mod principal studiul echilibrului sistemelor materiale. Elementele provenite din frecare (forțe și cupluri) se introduc în calcule alături de celelalte forțe și cupluri date sau provenind din legăturile fără frecare. După aceasta, problemele de echilibru cu frecare se rezolvă în același mod ca și celelalte probleme de echilibru studiate până aci.

Pentru a nu avea nedeterminări, se va considera în general că echilibrul este „la limită”, adică corpul respectiv este pe punctul de a fi pus în mișcare; în acest mod, forța sau cuplul de frecare respectiv au valorile lor maxime.

## 8. Stabilitatea echilibrului

a) **Echilibru stabil, nestabil și indiferent.** Să presupunem că avem un corp care sub acțiunea unui sistem de forțe poate ocupa mai multe poziții; într-una dintre aceste poziții corpul rămâne în echilibru. Vom spune despre corpul dat că se află într-o poziție de echilibru *stabilă* sau în *echilibru stabil* dacă aducându-l din această poziție într-o poziție vecină el tinde

să-și reia imediat poziția inițială de echilibru. În caz contrar, când deplasînd corpul din poziția de echilibru într-o poziție vecină se depărtează de această poziție, vom spune că se află în *echilibru nestabil*. Mai există și o a treia situație, când pozițiile vecine poziției de echilibru inițiale sînt ele însele noi poziții de echilibru; în acest caz, vom spune despre corpul respectiv că se află în *echilibru indiferent*.

Pentru corpurile aflate numai sub acțiunea greutății proprii există o regulă simplă care ne arată dacă ele se află în echilibru stabil, nestabil sau indiferent; *poziția de echilibru stabil este cea dintre pozițiile permise de legăturile corpului respectiv pentru*

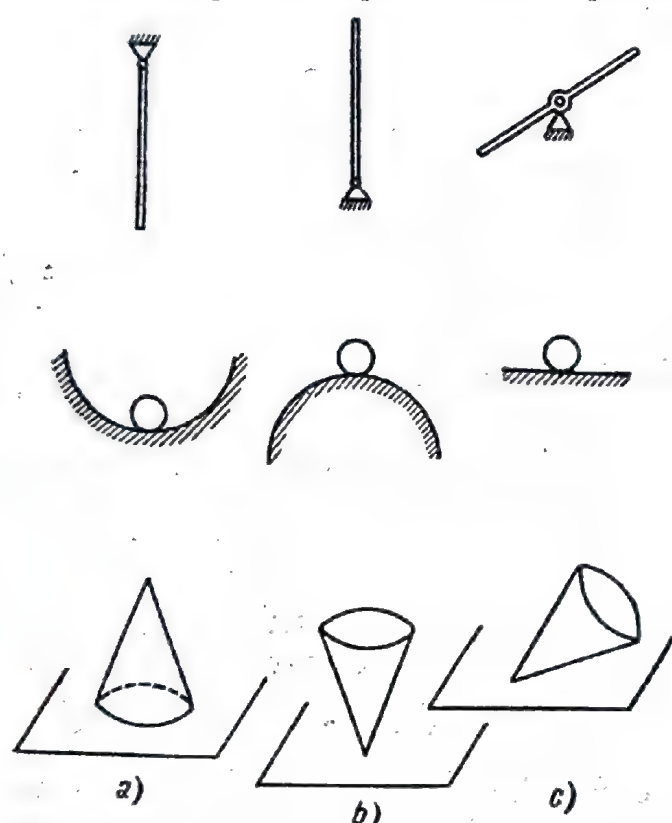


Fig. 3.27.

care centrul de greutate se află cel mai jos; poziția pentru care centrul de greutate al corpului se află cel mai sus este poziția de echilibru nestabil. Pozițiile de echilibru pentru care centrul de greutate se află la o aceeași înălțime față de planul orizontal sînt pozițiile de echilibru indiferent. În figura 3.27 sînt arătate pozițiile de echilibru a trei corpuri: un corp articulat într-un punct fix (bară, pîrghie), o bilă rezemată pe o suprafață și un con circular drept, aflate sub acțiunea a două forțe: greutatea proprie și reacți-

unea legăturii. Pentru toate aceste corpuri poziția de echilibru (a) este o poziție de echilibru stabil, poziția de echilibru (b) este o poziție de echilibru nestabil, iar poziția de echilibru (c) este o poziție de echilibru indiferent.

b) **Stabilitatea corpurilor rezemate pe o bază de susținere plană.** Să considerăm un corp de o formă oarecare, fixat pe o bază de susținere plană și acționat de un sistem de forțe coplanare. Baza de susținere poate avea orice formă: cerc, dreptunghi, pătrat. Sub acțiunea forțelor care-i sînt aplicate, corpul poate rămîne în echilibru pe baza sa de susținere sau se poate răs-



turna în jurul unei punct sau unei muchii a acestei baze. Pentru a studia posibilitatea acestei răsturnări vom proceda astfel: intersectăm planul  $P$  al forțelor care acționează corpul cu perimetrul bazei de susținere; din această intersecție rezultă două puncte, care reprezintă punctele în jurul cărora este posibilă răsturnarea, și pe care le vom denumi *puncte de răsturnare*.

Să alegem unul dintre aceste puncte și să împărțim forțele care acționează corpul în două categorii: o parte din forțe al căror momente în raport cu unul dintre cele două puncte de răsturnare este astfel încât ele caută să răstoarne corpul în jurul unuia dintre puncte ridicându-l de pe baza sa de susținere, și o altă parte care caută să-l țină în contact cu baza de susținere. Suma momentelor forțelor din prima categorie în raport cu punctul de răsturnare o vom numi *moment de răsturnare* ( $M_r$ ), iar suma momentelor forțelor din cea de-a doua categorie în raport cu punctul de răsturnare o vom numi *moment de stabilitate* ( $M_s$ ). Pentru ca să n-avem răsturnarea corpului va trebui ca :

$$M_s > M_r.$$

Raportul :

$$\varepsilon = \frac{M_s}{M_r}$$

care măsoară stabilitatea corpului în raport cu punctul de răsturnare îl vom denumi *coeficient de stabilitate*. Pentru ca să n-avem răsturnare trebuie ca  $\varepsilon > 1$ .

Studiul stabilității corpurilor intervine în practică la macarale și la diferite instalații avînd sarcini în consolă, unde se pune problema determinării unor elemente de construcții (fundatii, contragreutăți etc.) astfel ca să se asigure stabilitatea instalației respective în anumite condiții date.

## 9. Aplicații

a) Pe șantierele de construcția locuințelor pentru oamenii muncii din patria noastră transportul materialelor de la un loc la altul se face cu macarale de tipul celor arătate în figura 3.28. Se cere să se studieze stabilitatea acestei macarale.

Planul forțelor care acționează macaraua este vertical, iar planul bazei de susținere este orizontal; forma bazei de susținere este un dreptunghi avînd drept colțuri axele de sus-

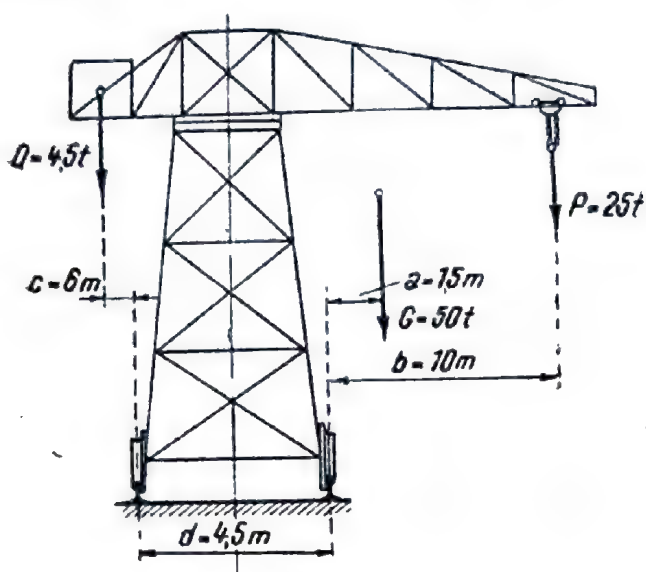


Fig. 3.28.

ținere ale roților de transport ale macaralei. Intersectînd planul forțelor cu planul bazei de susținere se obțin cele două puncte de răsturnare *A* și *B*.

*Stabilitatea sub sarcină.* Cînd macaraua este încărcată, ea se află sub acțiunea forțelor *P*, *G* și *Q* (fără a lua în considerare reacțiunile). Momentele de răsturnare și de stabilitate sînt :

— momentul de răsturnare față de punctul *A* ;

$$M_{rA} = Ga + Pb = 50 \times 1,5 + 25 \times 10 = 75 + 250 = 325 \text{ tfm};$$

— momentul de stabilitate față de punctul *A* :

$$M_{sA} = Q(c + d) = 45 \times 10,5 = 472,5 \text{ tfm}.$$

Coeficientul de stabilitate este :

$$\epsilon_A = \frac{M_{sA}}{M_{rA}} = \frac{472,5}{325} = 1,45.$$

— Momentul de răsturnare față de *B*:

$$M_{rB} = Qc = 45 \times 6 = 270 \text{ tfm}.$$

— Momentul de stabilitate față de *B* :

$$M_{sB} = G(a + d) + P(b + d) = 50 \times 6 + 25 \times 14,5 = 300 + 362,5 = 662,5 \text{ tfm}.$$

Coeficientul de stabilitate față de punctul *B* este :

$$\epsilon_B = \frac{M_{sB}}{M_{rB}} = \frac{662,5}{270} \approx 2,45$$



*Stabilitatea în gol.* Când macaraua lucrează în gol (fără sarcină), ea se află numai sub acțiunea forțelor  $G$  și  $Q$  (fără a lua în considerare reacțiunile). Momentele de răsturnare și stabilitate sînt :

— momentul de răsturnare față de  $A$  :

$$M_{rA} = G\alpha = 50 \times 1,5 = 75 \text{ tfm};$$

— momentul de stabilitate față de  $A$  :

$$M_{sA} = Q(c + d) = 45 \times 10,5 = 472,5 \text{ tfm.}$$

Coeficientul de stabilitate este :

$$\varepsilon_A = \frac{M_{sA}}{M_{rA}} = \frac{472,5}{75} = 6,3.$$

— Momentul de răsturnare față de  $B$  :

$$M_{rB} = Qc = 45 \times 6 = 270 \text{ tfm.}$$

— Momentul de stabilitate față de  $B$  :

$$M_{sB} = G(a + d) = 50 \times 6 = 300 \text{ tfm.}$$

Coeficientul de stabilitate este :

$$\varepsilon_B = \frac{M_{sB}}{M_{rB}} = \frac{300}{270} = 1,1.$$

Toți coeficienții de stabilitate fiind supraunitari, macaraua nu se va răsturna.

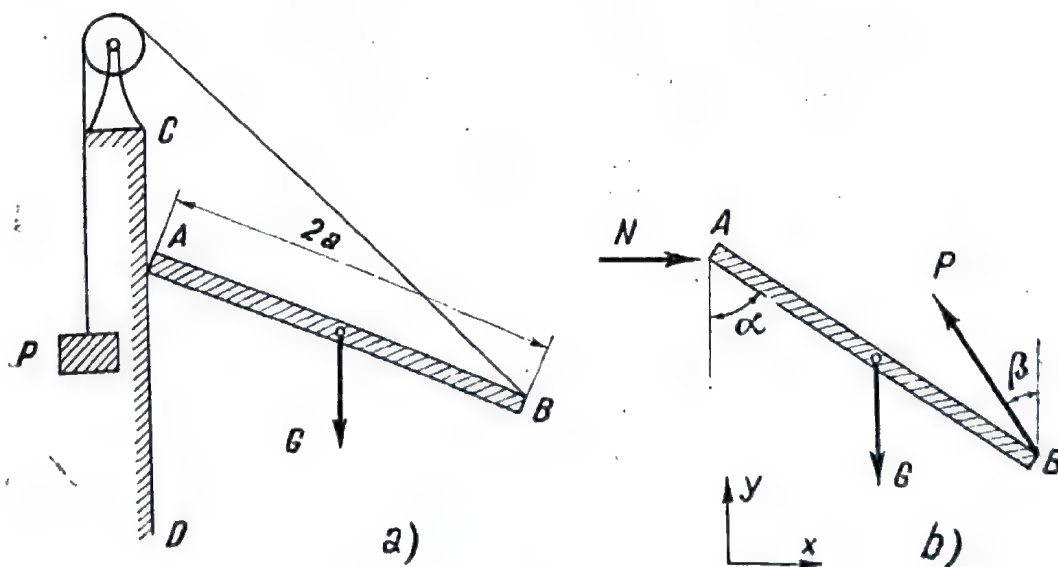


Fig. 3.29.

b) Se cere să se determine poziția de echilibru și reacțiunile unei bare de lungime  $2a$  și greutate  $G$  rezemată în extremitatea  $A$  pe un perete vertical luciu și prinsă în extremitatea  $B$  cu un fir trecut peste un scripete; la extremitatea cealaltă a firului este atârnată greutatea  $P$  (fig. 3.29, a).

### Rezolvare

Poziția barei  $AB$  este determinată de doi parametri, spre exemplu distanța  $CA = x$  și unghiul  $DAB = \alpha$  al barei cu

Tabela 3.6

Datele și necunoscutele într-o problemă de statică

Date	Forțe	$G, P$
	Marimi geometrice și mecanice	$a$
Necunoscute	Poziția de echilibru	$\alpha, \beta$
	Reacțiuni	$N$

peretele, sau unghiul  $DAB = \alpha$  și unghiul  $\beta$  făcut de fir cu verticala (fig. 3.29, b), alegem cea de-a doua variantă.

Tensiunea din fir este egală cu greutatea  $P$ , iar peretele transmite barei o reacțiune  $N$ , normală pe  $CD$ .

Datele și necunoscutele sînt date în tabela 3.6.

Ecuatiile de echilibru sînt:

$$\begin{aligned} (\Sigma F_x = 0) \quad N - P \sin \beta &= 0, \\ (\Sigma F_y = 0) \quad P \cos \beta - G &= 0, \\ (\Sigma M_B = 0) \quad -N \cdot 2a \cos \alpha + Ga \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Din cea de-a doua ecuație rezultă:

$$\cos \beta = \frac{G}{P},$$

iar din prima:

$$N = P \sin \beta = P \sqrt{1 - \frac{G^2}{P^2}} = \sqrt{P^2 - G^2}.$$

Din ultima ecuație rezultă:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2N}{G} = \frac{2\sqrt{P^2 - G^2}}{G}.$$



Deoarece toate necunoscutele sînt exprimate ca funcții de date, problema se consideră rezolvată.

c) Un recipient care conține gaz la presiunea  $p_2 = 3 \text{ kgf/cm}^2$  este alimentat de la o rețea de gaz avînd presiunea  $p_1 = 5 \text{ kgf/cm}^2$ , prin intermediul regulatorului arătat în figura 3.30, cu ajutorul căruia se menține o presiune constantă în recipient. Se ce-

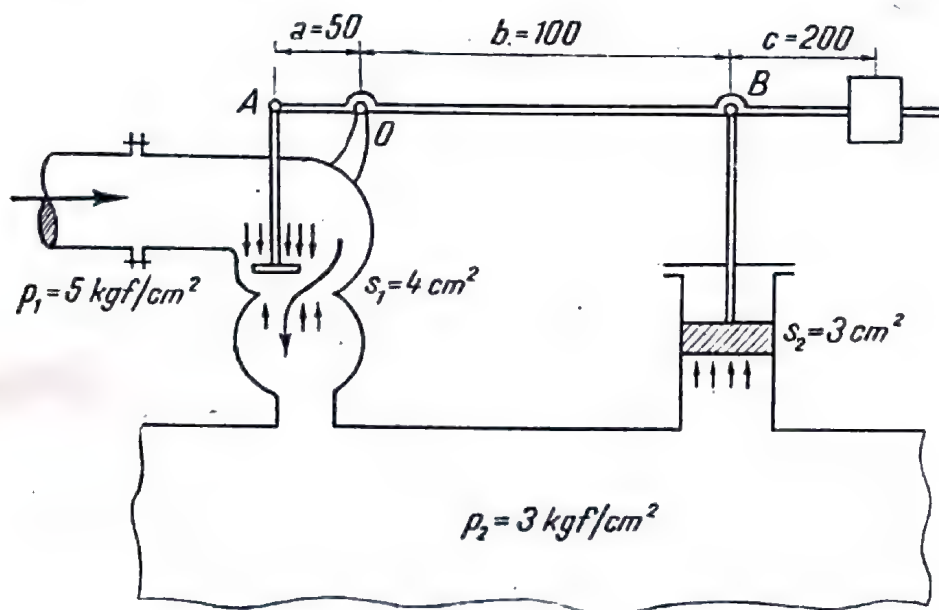


Fig. 3.30.

re să se calculeze valoarea contragreutății  $G$  și să se explice din punct de vedere mecanic funcționarea regulatorului, neglijînd frecările.

### Rezolvare

Regulatorul din figura 3.30 funcționează astfel: pentru valorile indicate ale presiunilor din conducta de alimentare și din recipient, ventilul care leagă conducta de alimentare cu recipientul este închis, pîrghia aflîndu-se în echilibru în poziția orizontală. Echilibrul pîrghiei este asigurat în această poziție de egalitatea momentelor date față de punctul  $O$  pe de o parte de contragreutatea  $G$ , iar pe de altă parte de forțele de presiune ale gazului pe fețele ventilului și pistonului. Dacă presiunea în recipient scade, momentul dat de contragreutate este mai mare decît momentele date de forțele care provin din acțiunea gazului asupra ventilelor și ventilul din conducta de alimentare se deschide.

Pentru determinarea valorii contragreutății  $G$ , vom studia echilibrul pîrghiei  $AOB$ . Ea este supusă următoarelor forțe (fig. 3.31) :

- greutatea  $G$ ;
- forța  $P_1 = (p_1 - p_2)s_1$ , în care  $s_1$  este aria ventilului (se neglijează locul ocupat de tijă);
- forța  $P_2 = p_2s_2$ , în care  $s_2$  este aria pistonului;
- reacțiunea  $R$  a articulației  $O$ , care are numai componenta verticală, deoarece nu există nici o forță orizontală care să acționeze pîrghia.

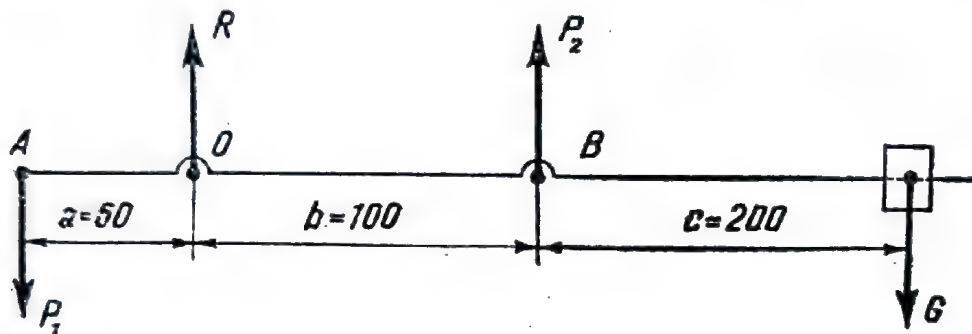


Fig. 3.31.

Forțele care acționează pîrghia formează un sistem de forțe paralele și coplanare. Conform tabelii 3.2 se pot scrie două ecuații de echilibru :

$$(\sum F_{iy} = 0) \quad R - P_1 + P_2 - G = 0,$$

$$(\sum M_O = 0) \quad P_1 a + P_2 b - G(b + c) = 0.$$

Din aceste ecuații deducem, valorile celor două necunoscute  $R$  și  $G$  :

$$R = P_1 + G - P_2,$$

$$G = \frac{P_1 a + P_2 b}{b + c}.$$

Înlocuind valorile numerice obținem :

$$G = \frac{(5-3) \times 4 \times 5 + 3 \times 3 \times 10}{10 + 20} = \frac{130}{30} = 4,33 \text{ kgf},$$

$$R = (5 - 3) \times 4 + 4,33 - 3 \times 3 = 3,33 \text{ kgf}.$$

Cele două momente care fac echilibrul pîrghiei  $AOB$  sînt deci :

— momentul contragreutății  $G$ , care caută să deschidă ventilul de admisie, avînd valoarea  $M_1 = G(b + c)$ ;

— momentul dat de forțele  $P_1$  și  $P_2$ , care caută să închidă ventilul de admisie, avînd valoarea  $M_2 = P_1 a + P_2 b$ .



Să presupunem că presiunea în recipient scade cu o cantitate  $x$  devenind  $(p_2 - x)$ . Cele două momente au valorile :

$$M_1 = G(b + c) = 4,33(10 + 20) = 129,9 \approx 130 \text{ kgf/cm},$$

$$M_2 = (5 - 3 + x)4 \times 5 + 3 \times (3 - x) \times 10 = \\ = 40 + 20x + 90 - 30x = 130 - 10x$$

Se vede că  $M_2 < M_1$ , deci ventilul de admisie se va deschide imediat ce valoarea  $10x$  va învinge momentele forțelor de frecare.

d) Un sistem de frînare a firului la o mașină de filat se compune dintr-o serie de bare care se pot deplasa cu ajutorul unor cadre, ca în figura 3.32, a. În poziția în care firul nu se freacă de bare, el necesită pentru a fi tras o forță  $P = 120$  gf. Se cere valoarea forței minime cu care trebuie tras firul în poziția „frînat” (fig. 3.32, b) când toate centrele barelor sînt coliniare. Se dau  $l = 36$  mm,  $d = 20$  mm,  $\mu = 0,5$ , numărul barelor  $n = 5$ .

#### Rezolvare

Să considerăm două bare vecine (fig. 3.32, c). Relația dintre tensiunile  $Q$  și  $T_1$  este dată de formula (3.12) :

$$Q = T_1 e^{\mu \alpha}.$$

Pentru cea de-a doua bară avem de asemenea :

$$T_1 = T_2 e^{\mu \alpha},$$

care înlocuită în prima dă :

$$Q = T_2 e^{2\mu \alpha}.$$

Procedînd la fel din aproape în aproape găsim :

$$Q = P e^{n\mu \alpha},$$

$n$  fiind numărul barelor.

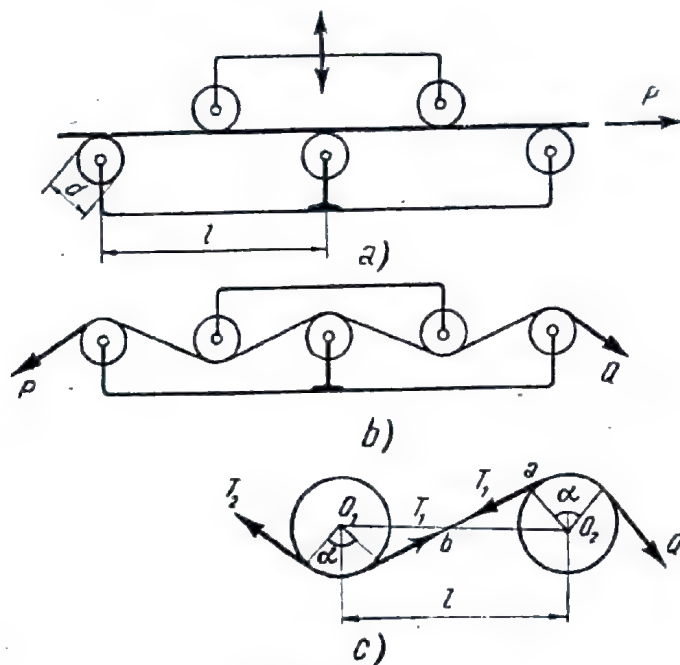


Fig. 3.32.

Pentru calculul numeric, determinăm mai întâi din triunghiul  $abO_2$  (fig. 3.32, c) valoarea unghiului  $\alpha$  în radiani :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{O_2a}{O_2b} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{d}{l} = \frac{20}{36} = 0,555,$$

$$\alpha = 67^\circ 40' = 1,18 \text{ rad.}$$

Rezultă :

$$Q = 120 \cdot e^{5 \times 1,48 \times 0,5} = 228 \text{ kgf.}$$

## Capitolul IV

### APLICAȚII TEHNICE ALE STATICII

În cele ce urmează se va studia echilibrul câtorva sisteme de corpuri denumite *mașini simple* și care au aplicații în tehnică. Ele servesc în general la învingerea unor forțe sau cupluri avînd valori mai mari cu ajutorul unor forțe sau cupluri de valori mult mai mici, accesibile unei acțiuni manuale. În general, greutatea corpurilor care alcătuiesc mașina simplă respectivă se neglijează în raport cu restul forțelor care apar.

Forța sau cuplul care se aplică se numește *forță motoare*, respectiv *cuplu motor*, iar forța sau cuplul care trebuie învins se numește *forță rezistentă* sau *cuplu rezistent*.

Problema care trebuie rezolvată în cazul acestor mașini constă în a determina relația dintre forța motoare sau cuplul motor și forța rezistentă sau cuplul rezistent.

Tot în acest capitol vor fi studiate și o serie de sisteme de corpuri formate din bare articulate la extremități și denumite *grinzi cu zăbrele*.

#### 1. Planul înclinat

Planul înclinat este un dispozitiv care servește la ridicarea unor greutăți la înălțimi nu prea mari. În loc de a ridica o greutate la o anumită înălțime, fapt care uneori este imposibil deoarece greutatea respectivă depășește forța maximă a omului, o așezăm pe un plan înclinat și o tragem cu un cablu



sau cu un troliu în susul planului. În acest caz, forța cu care tragem cablul este mai mică decât greutatea ridicată. Asemenea operații de ridicare a greutăților pot fi văzute la rampele de încărcare și descărcare a vagoanelor.

Corpul care trebuie ridicat pe planul înclinat se află în echilibru sub acțiunea greutății sale  $G$ , care constituie forța rezistență, a reacțiunii normale  $N$ , a forței de frecare  $T$  și a forței de ridicare dirijată în susul planului  $F_m$ , care constituie forța motoare (fig. 4.1).

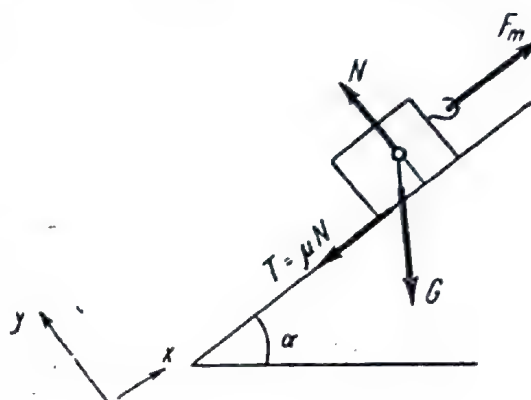


Fig. 4.1.

Considerînd acest sistem de forțe ca un sistem de forțe concurente și coplanare, ecuațiile de echilibru la limita de alunecare în susul planului se scriu :

$$\begin{aligned} (\Sigma F_{ix}=0) \quad F_m - \mu N - G \sin \alpha &= 0, \\ (\Sigma F_{iy}=0) \quad N - G \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Eliminînd pe  $N$  între aceste două ecuații obținem :

$$F_m = G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = kG. \quad (4.1)$$

Coeficientul  $k$  este în general subunitar, ceea ce înseamnă că forța de tracțiune în lungul planului ( $F_m$ ) este mai mică decât greutatea  $G$ .

Planul înclinat este cu atît mai util cu cît  $k$  este mai mic, deci cu cît  $\alpha$  și  $\mu$  sînt mai mici. Dacă  $k > 1$ , planul înclinat nu-și atinge scopul de a reduce efortul nostru.

## 2. Pîrghia

Orice corp articulat și supus acțiunii a două forțe coplanare cu articulația poartă numele de *pîrghie*. Cele două forțe sînt forța motoare  $F_m$  și forța rezistentă  $F_r$ . Corpul poate fi o bară, o placă sau un corp avînd o formă oarecare.

Pîrghia are nenumărate aplicații în practică (fig. 4.2) : astfel ea se întîlnește sub forma pedalei de frînă sau de la ambreiajul autovehiculelor (a), a culbutorului de acționat supapele motoarelor cu ardere internă (b), a cleștelui de scos cuie (c),

a foarfecelui de tăiat (*d*), a cleștelui de apucat materialul de la forjă (*e*), a mașinii de sudat (*f*), a menghinei de atelier (*g*), a supapei de siguranță (*h*), a bridei de prindere a piesei pe masa unei mașini-unelte (*i*) etc.

Pentru a determina relația dintre forța motoare și forța rezistentă vom scrie ecuația de momente în raport cu articulația *O*. Pârghia este acționată de următoarele forțe (fig. 4.3, *a*) :

- forța motoare  $F_m$ ;
- forța rezistență  $F_r$ ;
- reacțiunea  $R$  din articulația *O*, avînd modulul și orientarea necunoscute;

cuplul forțelor de frecare din articulația *O*; expresia acestui cuplu este :

$$M_f = \mu r N.$$

Din poligonul forțelor (fig. 4.3, *b*) deducem valoarea reacțiunii  $R$  :

$$R = \sqrt{F_m^2 + F_r^2 + 2 F_m F_r \cos \angle(\bar{F}_m, \bar{F}_r)}. \quad (4.2)$$

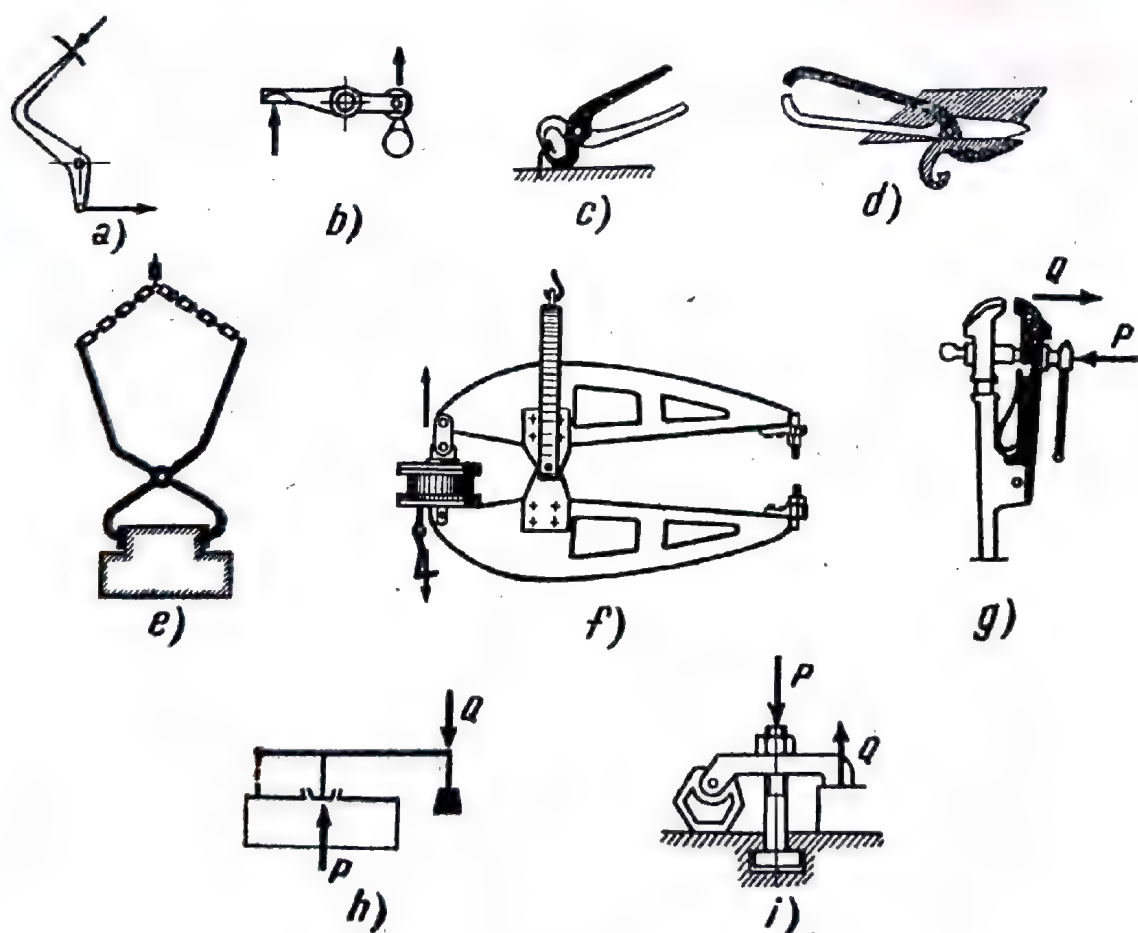


Fig. 4.2.

cu care avem :

$$M_I = \mu r \sqrt{F_m^2 + F_r^2 + 2 F_m F_r \cos \angle (\bar{F}_m, \bar{F}_r)}. \quad (4.3)$$

Greutatea pîrghiei se neglijează.

Din cele trei ecuații pe care le putem scrie în cazul sistemelor de forțe coplanare (tabela 3.2) vom scrie numai una : ecuația de momente în raport cu articulația  $O$  :

$$(\Sigma M_O = 0) - F_m a + F_r b + \\ + u' r \sqrt{F_m^2 + F_r^2 + 2 F_m F_r \cos \angle (\bar{F}_m, \bar{F}_r)} = 0 \quad (4.4)$$

Prin ridicare la pătrat obținem o ecuație de gradul al doilea, din care deducem două valori ale forței motoare  $F_m$ ; cea care convine problemei este valoarea pozitivă cea mai mică.

În practică se întîlnesc însă o serie de cazuri particulare, dintre care cele mai importante sînt următoarele :

— forțele  $F_m$  și  $F_r$  sînt paralele; aceasta înseamnă că :

$$\cos \angle (\bar{F}_m, \bar{F}_r) = \cos 0^\circ = 1.$$

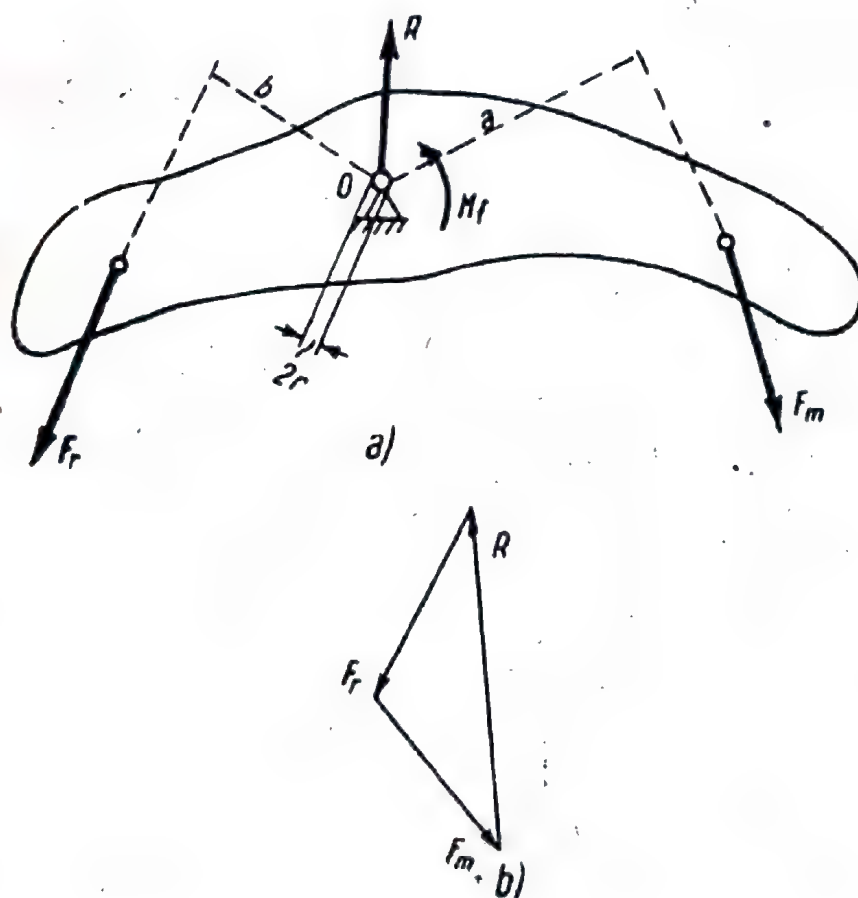


Fig. 4.3.



Expresia de sub radicalul din (4.4) devine un pătrat perfect și rezultă :

$$F_m = \frac{b + \mu' r}{a - \mu' r} F_r = k F_r. \quad (4.5)$$

Am obținut o relație analogă celei din cazul planului înclinat ; și în acest caz, pentru ca pîrghia să-și poată atinge scopul de a reduce forța rezistentă va trebui să existe relația  $k \leq 1$ .

Se neglijează frecarea din articulație ( $\mu' = 0$ ). În acest caz, relația dintre forța motoare și cea rezistentă devine :

$$F_m = \frac{b}{a} F_r = k' F_r. \quad (4.6)$$

Se observă că  $k' < k$  adică, în acest caz, după cum era de așteptat, forța motoare este mai mică decît în cazul real cu frecare.

### 3. Scripetii

a) **Scripetele cu ax fix** este unul dintre cele mai simple aparate de ridicat greutăți. El se compune dintr-o roată avînd fie numai un singur șanț la periferie, fie avînd două sau mai multe șanțuri de raze diferite (fig. 4.4), al cărei ax se poate

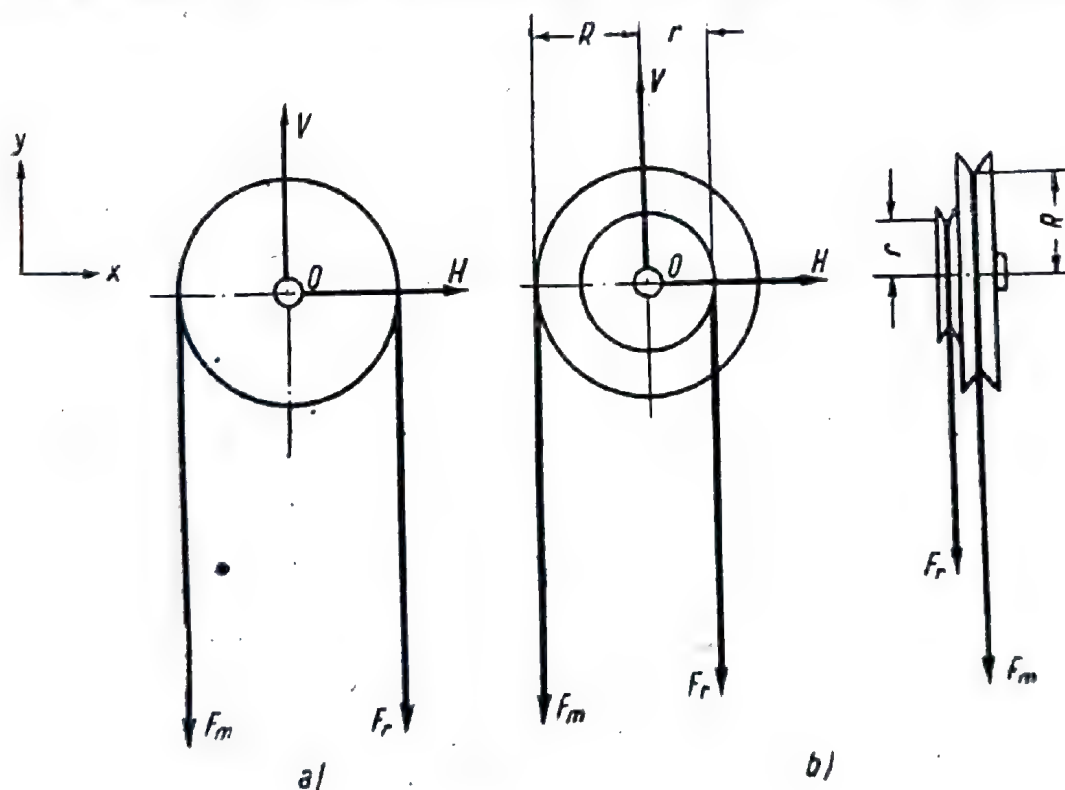


Fig. 4.4.

roti într-un lagăr fix, avînd la periferie un jgheab prin care este trecut un cablu sau un lanț. De un capăt al firului se atîrnă corpul care trebuie ridicat, corp care constituie forța rezistentă iar de celălalt capăt se trage cu o forță  $F_m$ , care reprezintă forța motoare.

Scripetele aduce o ușurare a ridicării greutăților prin faptul că în loc de a le trage de jos în sus le putem trage de sus în jos.

În repaus sau în mișcare uniformă, scripetele se află în echilibru sub acțiunea reacțiunilor  $H$  și  $V$  din articulație și a forțelor  $F_m$  și  $F_r$  (greutatea scripetelui se neglijează). Scriind ecuațiile de echilibru obținem :

$$\begin{aligned} (\Sigma F_x = 0) \quad & H = 0, \\ (\Sigma F_y = 0) \quad & V - F_m - F_r = 0, \\ (\Sigma M_O = 0) \quad & -F_m R + F_r R = 0 \text{ (fig. 4.4, a),} \\ (\Sigma M_O = 0) \quad & -F_m R + F_r r = 0 \text{ (fig. 4.4, b).} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Din ultimele ecuații deducem :

$$F_m = F_r \quad \text{(fig. 4.4, a),}$$

$$F_m = \frac{r}{R} F_r \quad \text{(fig. 4.4, b),}$$

adică în cazul scripetelui cu un singur șanț forța motoare este egală cu forța rezistentă, în timp ce în cazul scripetelui cu două șanțuri se obține o reducere a forței rezistente în raportul  $\frac{r}{R}$ , ca în cazul pîrghiei fără frecări (formula 4.6).

În realitate, relațiile (4.7) nu sînt valabile decît cu o oarecare aproximație, deoarece am neglijat atît frecările din axul scripetelui cît și rigiditatea cablului trecut peste scripete. Într-adevăr, în articulația  $O$  de rază  $a$  (fig. 4.5) apare un cuplu de frecare al cărui moment este :

$$M_f = \mu' a V = \mu' a (F_m + F_r), \quad (4.8)$$

deoarece din cea de-a doua ecuație a sistemului (4.7) rezultă :

$$V = F_m + F_r. \quad (4.9)$$

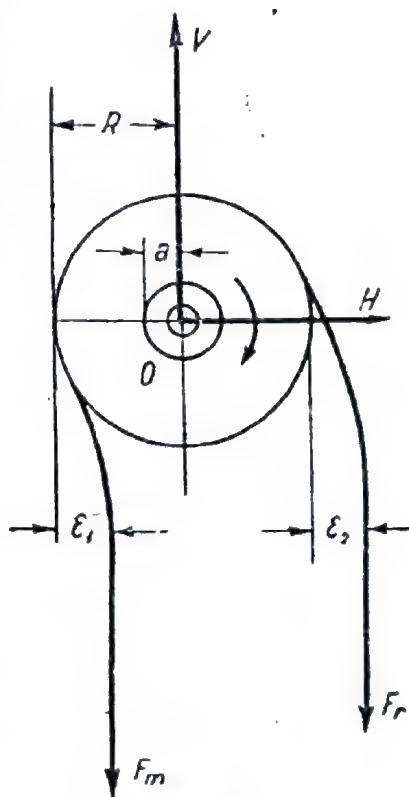


Fig. 4.5.

De asemenea, se constată practic că în timpul acționării scripetelui cablul se înfășoară astfel pe scripete, încît direcția forței motoare este mai aproape de axul scripetelui decît tangenta la scripete cu o distanță oarecare  $\epsilon_1$ , iar forța rezistentă se depărtează de tangenta la scripete cu distanța  $\epsilon_2$ . În noile condiții, ecuația de momente față de centrul scripetelui se scrie :

$$(\Sigma M_O = 0) + F_m(R - \epsilon_1) - F_r(R + \epsilon_2) - \mu'a(F_m + F_r) = 0. \quad (4.10)$$

Din această ecuație rezultă relația dintre forța motoare și forța rezistentă :

$$F_m = \frac{R - \mu'a + \epsilon_2}{R + \mu'a - \epsilon_1} F_r = k F_r. \quad (4.11)$$

În general  $k > 1$  (practic  $k = 1,05 \dots 1,2$ ), ceea ce înseamnă că forța motoare este mai mare decît cea rezistentă, fapt care reduce avantajul scripetelui cu ax fix numai la schimbarea sensului forței rezistente.

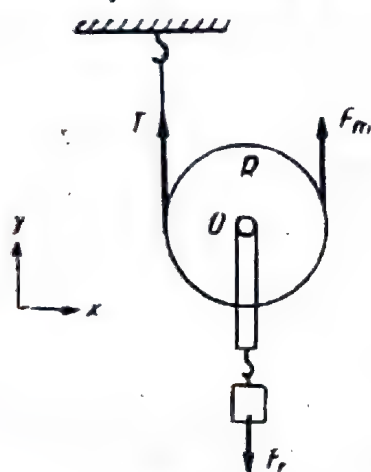


Fig. 4.6.

b) **Scripetele cu ax mobil** este format dintr-o roată cu ax mobil, avînd fixată pe axul său o furcă de care se atîrnă greutatea de ridicat. Un capăt al cablului se atîrnă de un cîrlig fix, iar de celălalt capăt se trage cu forța motoare  $F_m$  (fig. 4.6).

Dacă nu ținem seama de frecări, ecuațiile de echilibru ale scripetelui sînt :

$$\begin{aligned} (\Sigma F_y = 0) \quad T + F_m - F_r &= 0, \\ (\Sigma M_O = 0) \quad -TR + F_m R &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

(S-au scris numai două ecuații de echilibru deoarece sistemul forțelor care acționează scripetele este un sistem de forțe paralele coplanare).

Din aceste ecuații rezultă :

$$F_m = T = \frac{F_r}{2}. \quad (4.13)$$

În realitate, dacă se ține seama de frecările din axul scripetelui și rigiditatea cablului, cea de-a doua ecuație a sistemului (4.12) se înlocuiește cu :

$$F_m = kT, \quad (4.14)$$



rezultat care introdus în prima ecuație a aceluiași sistem conduce la :

$$T = \frac{F_r}{1+k};$$

deci :

$$F_m = kT = \frac{k}{1+k} F_r = k_1 F_r. \quad (4.15)$$

Se poate arăta că  $k_1 > \frac{1}{2}$  adică forța motoare în cazul cu frecări este mai mare decât în cazul fără frecări.

c) **Sisteme de scripeți.** Pentru a beneficia atât de avantajul reducerii forței rezistente oferit de scripetele mobil cât și de avantajul schimbării sensului acestei forțe, se folosesc combinații de scripeți fiși și mobili, denumite *sistem de scripeți*. Ele au aplicații în industria petrolieră, în industria construcțiilor, la tot felul de mașini de ridicat și transportat (macarale, graifăre ect.).

Un sistem de  $n$  scripeți mobili și un scripete fix, dispuși ca în figura 4.7 poartă denumirea de *palan* (în cazul figurii  $n = 3$ ).

Pentru a determina relația dintre forța motoare și forța rezistentă, izolăm scripetii și scriem următoarele ecuații :

— proiecții pe verticală pentru fiecare scripete mobil :

$$\begin{aligned} T_5 + T_6 &= T_4; \\ T_4 + T_4 &= T_2 \\ T_2 + T_1 &= T_r \end{aligned} \quad (4.16)$$

— ecuații de momente în raport cu centrele scripetilor (pentru fiecare scripete forța din dreapta este forța motoare, iar forța din stînga este forța rezistentă) :

$$\begin{aligned} F_m &= kT_6 \\ T_6 &= kT_5 \\ T_4 &= kT_3 \\ T_2 &= kT_1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

(Am admis același  $k$  pentru toți scripetii.)

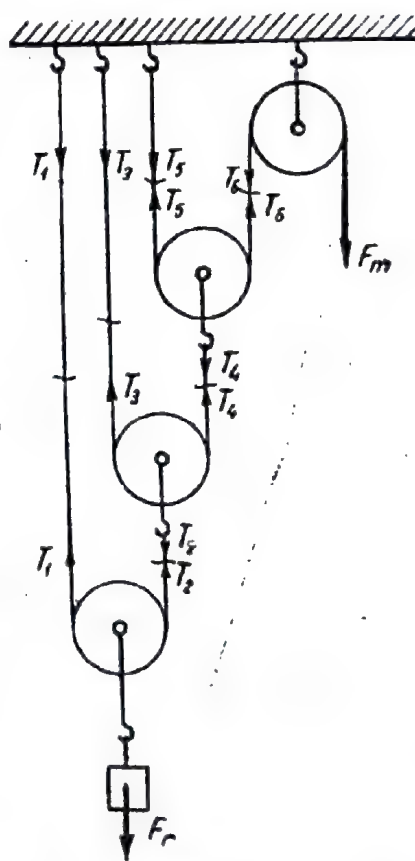


Fig. 4.7.

Înlocuind ultimele trei relații ale sistemului (4.17) în ecuațiile (4.16) obținem :

$$\begin{aligned} T_5(1+k) &= T_4 \\ T_3(1+k) &= T_2 \\ T_1(1+k) &= F_r. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Din primele două ecuații ale sistemului (4.17) și prima ecuație a sistemului (4.18) deducem :

$$F_m = kT_6 = k^2T_5 = \frac{k^2}{1+k} T_4 .$$

Ținând seama de cea de-a treia ecuație a sistemului (4.17) și de cea de-a doua ecuație a sistemului (4.18), deducem :

$$F_m = \frac{k^2}{1+k} T_4 = \frac{k^3}{1+k} T_3 = \frac{k^3}{(1+k)^2} T_2 .$$

În fine, ținând seama de ultimele două ecuații ale ambelor sisteme, deducem :

$$F_m = \frac{k^3}{(1+k)^2} T_2 = \frac{k^4}{(1+k)^2} T_1 = \frac{k^4}{(1+k)^3} F_r = kF_r .$$

Pentru un număr oarecare  $n$  de scripeți vom avea :

$$F_m = \frac{k^{n+1}}{(1+k)^n} F_r . \quad (4.19)$$

Pentru cazul fără frecări ( $k = 1$ ), obținem :

$$F_m = \frac{1}{2^n} F_r . \quad (4.20)$$

Coeficientul de reducere al forței rezistente depinde de numărul  $n$  al scripeților mobili, care apare la exponentul lui 2, fapt pentru care acest sistem de scripeți mai este denumit și *palan exponențial*. În practică, se întâlnesc sisteme de scripeți foarte diverse; în figura 4.8 sînt arătate cîteva asemenea sisteme denumite : palan (fig. 4.8, a), macara diferențială (fig. 4.8, b), troliu diferențial (fig. 4.8, c). Pentru oricare sistem de

scripeți, modul de determinare a coeficientului  $k$  de reducere a forței rezistente se face în același mod ca cel din exemplul de mai sus.

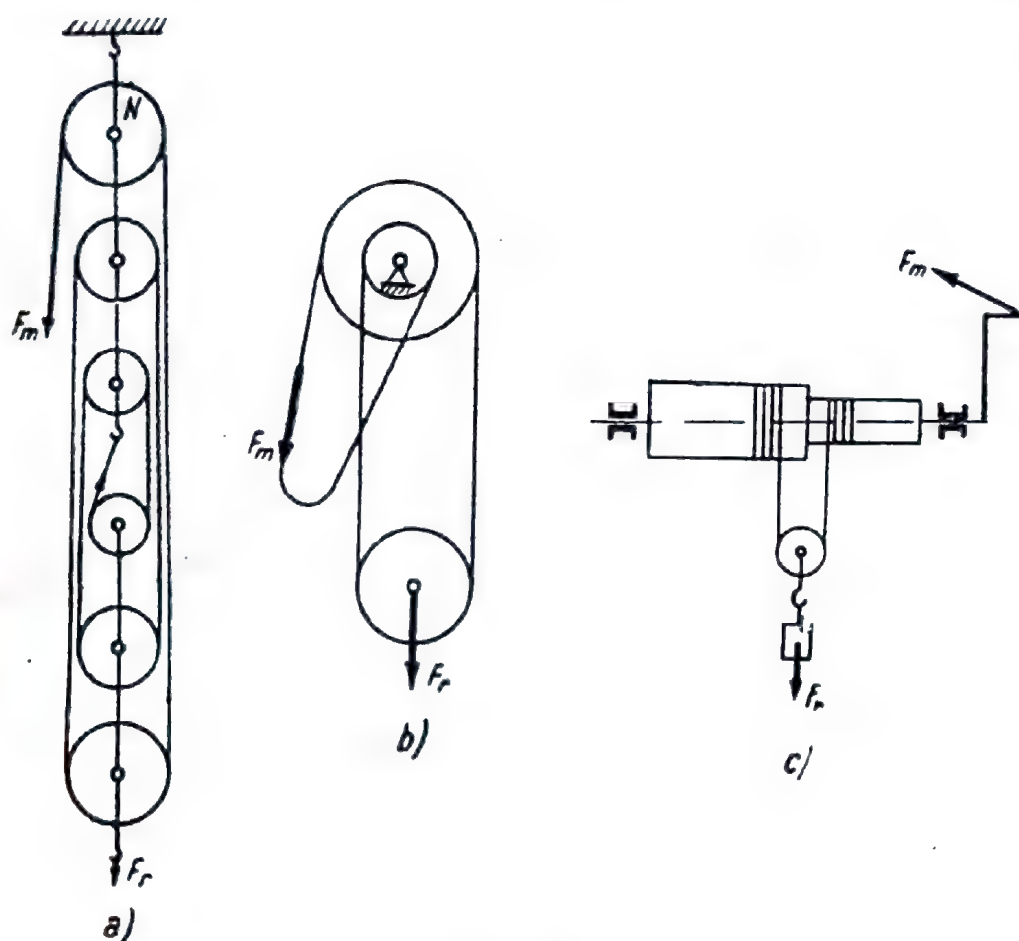


Fig. 4.8.

#### 4. Pana

Pana este corp de formă prismatică, avînd una sau două fețe opuse înclinate; ea servește pentru îmbinarea a două organe de mașini, ca de exemplu tija pistonului cu capul de cruce, o roată cu un arbore etc.

În secțiune transversală, pana are forma unui trapez isoscel sau dreptunghic. Unghiul format de laturile neparalele ale trapezului este denumit *unghiul penei*.

Pana se montează în general prin batere cu ciocanul. Forța motoare care înfige pana în locașul ei trebuie să învingă rezistențele opuse de corpul în care ea este introdusă, și anume



reațiunile normale  $N_1$  și  $N_2$  și forțele de frecare  $T_1$  și  $T_2$  (fig. 4.9, a).

Vom considera că pana apasă uniform pe toată suprafața de contact cu corpul în care este introdusă; în acest caz, rezultantele reacțiunilor normale din punctele de contact ( $N_1$  și

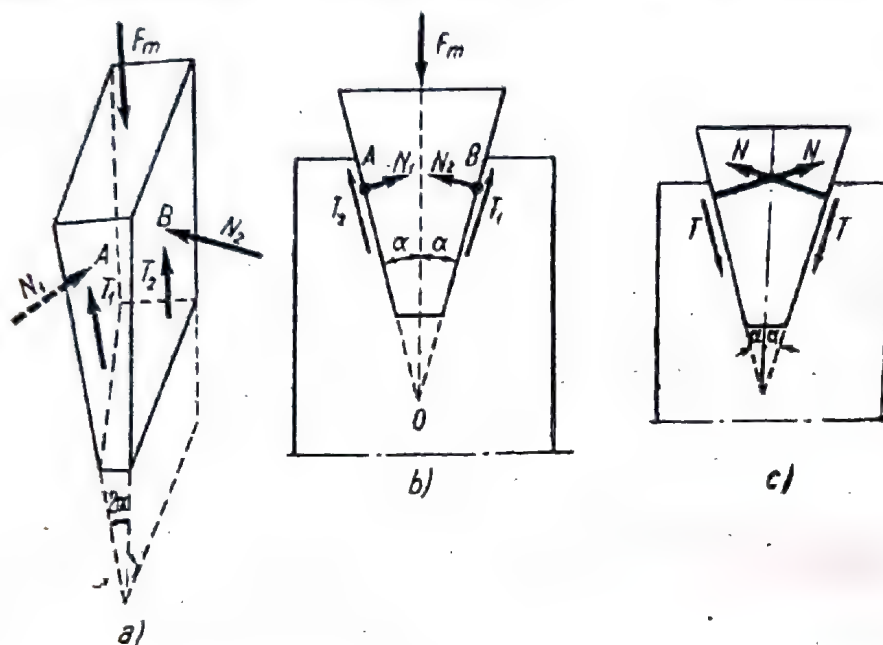


Fig. 4.9.

$N_2$ ) și rezultantele  $T_1$  și  $T_2$  ale forțelor de frecare se află în planul transversal de simetrie al penei împreună cu  $F_m$ ; forțele care acționează pana formează deci un sistem de forțe coplanare (fig. 4.9, b). Ecuațiile de echilibru sînt:

$$\begin{aligned} (\Sigma F_x = 0) \quad & N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha - T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \alpha = 0, \\ (\Sigma F_y = 0) \quad & -F_m + N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha + T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \alpha = 0, \quad (4.21) \\ (\Sigma M_o = 0) \quad & N_2 \cdot Ob - N_1 \cdot OA = 0. \end{aligned}$$

Dacă considerăm că din cazul simetriei punctele A și B se află la aceeași distanță de O ( $OA = OB$ ), avem:

$$N_1 = N_2 = N. \quad (4.22)$$

Forțele de frecare la limită au valorile:

$$\begin{aligned} T_1 &= \mu N_1; \quad T_2 = \mu N_2, \\ T_1 &= T_2 = T = \mu N. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Înlocuind în ecuațiile (4.21) obținem:

$$F_m = 2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)N = 2 \text{ kN}. \quad (4.24)$$

În general  $k < 1$ ; pana se fixează cu atît mai uşor cu cît  $\alpha$  şi  $\mu$  sînt mai mici.

Să considerăm echilibrul penei după ce a fost introdusă în locaşul său; în acest caz, forţa motoare  $F_m$  dispăre, iar forţele de frecare îşi schimbă sensul, ca în figura 4.9, c, pentru a menţine pana în locaşul său.

Pentru ca pana să nu fie expulzată din locaş după dispariţia forţei motoare  $F_m$ , trebuie ca suma proiecţiilor pe axa penei a forţelor care reţin pana în locaş (forţele de frecare) să fie mai mare decît proiecţiile forţelor care caută să expulzeze pana (forţele  $N$ ), adică :

$$2T \cos \alpha > 2N \sin \alpha ;$$

ţinînd seama de relaţia  $T = \mu N = N \operatorname{tg} \varphi$  rezultă :

$$\alpha < \varphi, \quad (4.25)$$

unde  $\varphi$  este unghiul de frecare. Aceasta este așa-numita *condiție de autofixare a penei*.

## 5. Grinzi cu zăbrele

Grinzile cu zăbrele sînt sisteme de bare articulate la extremităţi, care au o largă răspîndire în construcţiile metalice (ferme, susţineri de rezervoare, macarale, poduri ş.a.).

La studiul echilibrului grinzilor cu zăbrele se fac o serie de ipoteze simplificatoare în raport cu situaţia cunoscută din practică. Astfel, deşi în practică grinzile cu zăbrele sînt construite nituind sau sudînd barele la extremităţi cu ajutorul unor plăci denumite *gusee*, în mecanică ele sînt considerate ca fiind articulate la extremităţi, iar aceste articulaţii se consideră fără frecări. O altă ipoteză simplificatoare este aceea că barele n-au greutate (greutatea barei este neglijabilă în raport cu sarcinile transmise sau se împarte în mod egal la cele două extremităţi ale sale), precum şi faptul că sarcinile exterioare sînt transmise barelor numai la noduri (articulaţii).

Datorită acestor ipoteze, rezultă că barele unei grinzi cu zăbrele sînt acţionate numai la extremităţi; pentru ca ele să rămîină în echilibru, trebuie ca forţele care le acţionează să fie îndreptate după direcţia barei, fie către interiorul său (caz în care se zice că bara este comprimată), fie către exteriorul ei (caz în care se zice că bara este întinsă). Este evident că o bară



întinsă trage de nodul în care este prinsă, iar o bară comprimată apasă asupra nodului.

Problemele care se pun în cazul grinzilor cu zăbrele sînt :

— determinarea reacţiunilor din legăturile exterioare ale grinzii ;

— determinarea eforturilor care iau naştere în barele grinzii.

Despre poziţia de echilibru nu se poate vorbi, deoarece dacă legăturile exterioare imobilizează sistemul de bare el nu poate ocupa mai multe poziţii.

Prima problemă se rezolvă la fel ca în cazul oricărui alt corp ; se înlocuiesc legăturile exterioare prin reacţiuni şi se scriu ecuaţiile de echilibru din care se determină aceste reacţiuni.

Pentru rezolvarea celei de-a doua probleme se folosesc în practică două metode, şi anume : *metoda izolării nodurilor* şi *metoda secţiunilor*, care vor fi descrise în cele ce urmează.

Ambele aceste metode au la bază principiul echilibrului părţilor, care afirmă că dacă un sistem de corpuri se află în echilibru, atunci şi diferitele părţi ale acestui sistem se află de asemenea în echilibru.

Prima metodă consideră drept părţi ale sistemului de bare nodurile sale, iar cea de-a doua consideră drept părţi două jumătăţi ale sistemului de bare, obţinute prin secţionarea grinzii cu zăbrele.

a) **Metoda izolării nodurilor.** Să izolăm fiecare nod al grinzii cu zăbrele ; vom obţine o serie de puncte care se află sub acţiunea unui sistem de forţe concurente şi al căror echilibru este realizat dacă sînt satisfăcute cele două ecuaţii de proiecţie pentru forţele concurente şi coplanare.

Dacă aranjăm astfel încît în fiecare sistem de cîte două asemenea ecuaţii să nu existe decît maximum două necunoscute, izolînd nod cu nod, vom determina din aproape în aproape toate forţele care acţionează nodurile, deci toate eforturile din bare. Eforturile din bare le vom considera totdeauna pozitive, plecînd de la noduri ; dacă valorile lor rezultă pozitive din ecuaţiile de echilibru, ele sînt tensiuni pentru barele respective ; în caz contrar, ele sînt compresiuni.

b) **Metoda secţiunilor.** Să tăiem grinda cu zăbrele în două părţi, astfel încît tăietura făcută să secţioneze maximum trei bare care nu pleacă din acelaşi nod (nu sînt concurente). Scriind cele trei ecuaţii de echilibru pentru forţele coplanare vom determina tensiunile din barele tăiate.



Dacă în locul ecuațiilor obișnuite de proiecții și de momente vom scrie numai ecuații de momente în raport cu punctele de intersecție ale tensiunilor necunoscute luate două câte două, vom avea în fiecare ecuație numai câte o necunoscută; în cazul când două tensiuni sînt paralele, pentru a obține o ecuație care conține numai cea de-a treia tensiune, vom scrie ecuația de proiecții pe perpendiculara comună.

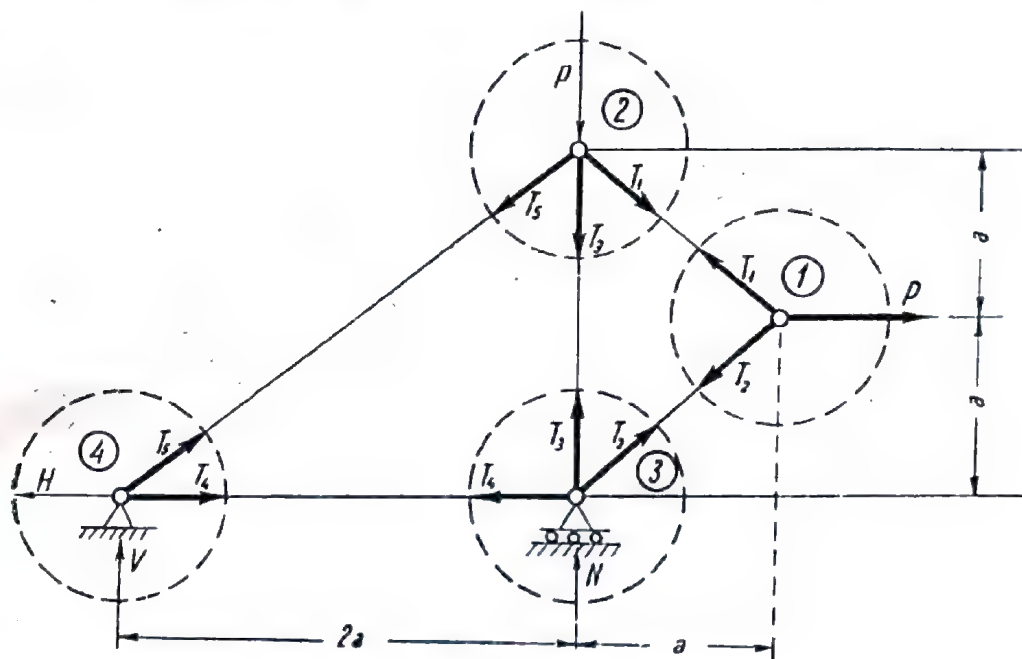


Fig. 4.10.

Această metodă este mai practică decît metoda izolării nodurilor, deoarece cu ajutorul ei putem determina direct efortul într-o anumită bară a grinzii fără a scrie echilibrul fiecărui nod.

### Exemple

1. Să se determine eforturile în barele grinzii cu zăbrele din figura 4.10.

Scriind ecuațiile de echilibru ale nodurilor avem:

Nodul 1.

$$(\sum F_x = 0) \quad P - T_1 \cos 45^\circ - T_2 \cos 45^\circ = 0,$$

$$(\sum F_y = 0) \quad T_1 \sin 45^\circ - T_2 \sin 45^\circ = 0.$$

Din acest sistem de ecuații rezultă:

$$T_1 = T_2 = \frac{P\sqrt{2}}{2}.$$

Nodul 2.

$$\begin{aligned} (\Sigma F_x = 0) \quad & -T_5 \cos 45^\circ + T_1 \cos 45^\circ = 0 \\ (\Sigma F_y = 0) \quad & -P - T_3 - T_1 \sin 45^\circ - T_5 \sin 45^\circ = 0. \end{aligned}$$

Rezultă :  $T_5 = \frac{P\sqrt{2}}{2}, T_3 = -2P.$

Nodul 3.

$$\begin{aligned} (\Sigma F_x = 0) \quad & -T_4 + T_2 \cos 45^\circ = 0 \\ (\Sigma F_y = 0) \quad & T_3 + N + T_2 \cos 45^\circ = 0. \end{aligned}$$

Rezultă :

$$T_4 = \frac{P}{2}, \quad N = \frac{3P}{2}.$$

Nodul 4.

$$\begin{aligned} (\Sigma F_x = 0) \quad & T_5 \cos 45^\circ + T_4 - H = 0 \\ (\Sigma F_y = 0) \quad & V + T_5 \sin 45^\circ = 0. \end{aligned}$$

Rezultă :

$$H = P, \quad V = -\frac{P}{2}.$$

**Observație.** În cazul acestei probleme nu a fost nevoie să scriem ecuațiile de echilibru exterior ale grinzii pentru a

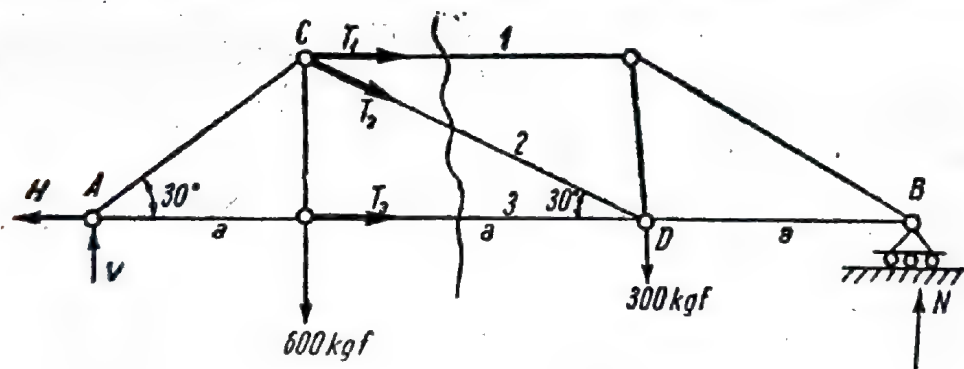


Fig. 4.11.

afla reacțiunile legăturilor; ele au rezultat din ecuațiile de echilibru ale nodurilor. Ecuațiile de echilibru exterior pot fi scrise pentru verificare.

2. Să se determine eforturile interioare în barele 1, 2 și 3 ale grinzii din figura 4.11.

Se află mai întâi reacțiunile scriind echilibrul întregii grinzi :

$$\begin{aligned}(\Sigma F_x = 0) \quad H &= 0, \\(\Sigma F_y = 0) \quad V + N - 600 - 300 &= 0, \\(\Sigma M_A = 0) \quad 600a + 300 \times 2a - N \times 3a &= 0,\end{aligned}$$

din care rezultă :

$$H = 0, \quad N = 400 \text{ kgf}, \quad V = 500 \text{ kgf}.$$

Se face apoi o secțiune ca în figura 4.11 ; se aplică metoda secțiunilor :

$$\begin{aligned}(\Sigma M_C = 0) \quad T_3 a \operatorname{tg} 30^\circ - Va &= 0, \\(\Sigma M_D = 0) \quad T_1 a \operatorname{tg} 30^\circ + V \times 2a - 600a &= 0, \\(\Sigma F_y = 0) \quad V - 600 - T_2 \sin 30^\circ &= 0.\end{aligned}$$

Rezultă din fiecare ecuație :

$$T_1 = -400\sqrt{3} = -692 \text{ kgf (compresiune)},$$

$$T_2 = -200 \text{ kgf (compresiune)},$$

$$T_3 = 500\sqrt{3} = 865 \text{ kgf (tensiune)}.$$



## Partea a III-a

# CINEMATICA SISTEMELOR MATERIALE

### Capitolul V

## PROBLEME GENERALE; NOȚIUNI INTRODUCTIVE ÎN CINEMATICĂ

### 1. Obiectul cinematicii

Cinematica este acea parte a mecanicii care studiază mișcarea mecanică a sistemelor materiale fără a ține seama de masele acestor sisteme și de forțele care le acționează. Astfel, în cinematică se studiază mișcarea pistonului unui motor fără a ține seama de masa lui sau de forța gazelor din cilindru care îl acționează; tot în cinematică se mai studiază și mișcarea unei oale de turnătorie transportată de o macara, de asemenea fără a se ține seama de masa ei sau de forțele care o acționează (forța din cablul de susținere și greutatea sa). Rezultă deci că cinematica studiază numai *latura geometrică* a mișcării mecanice, motiv pentru care ea a mai fost denumită în trecut și *geometria mecanicii*.

### 2. Subîmpărțirile cinematicii

Studiul mișcării sistemelor mecanice se face avînd în vedere două mari criterii:

— caracterul sistemului de referință la care se raportează mișcarea (sistem fix sau mobil);

— felul sistemului material a cărui mișcare se studiază (punct material, solid rigid sau sistem de solide rigide).

În cele ce urmează se va studia mai întîi mișcarea celor trei sisteme materiale cunoscute (punct material, solid rigid,

sistem de solide rigide) față de un reper fix și apoi mișcarea aceluiași sistem materiale față de un reper mobil.

Noțiunile de reper fix și reper mobil vor fi prezentate pe larg mai jos.

### 3. Scurt istoric

Cel dintâi care a studiat mai aprofundat mișcarea corpurilor a fost Aristotel, care înțelegea prin mișcare atât schimbarea poziției corpurilor în spațiu unele față de altele, cât și schimbările chimice și fizice ale acestora. Dintre savanții antichității trebuie remarcat și Arhimede, care cu ocazia lucrărilor sale asupra pîrghiei a studiat îndeosebi mișcarea pe cerc.

La dezvoltarea cinematicii au mai contribuit și: Leonardo da Vinci, N. Copernic, Galileo Galilei, René Descartes, G. de Roberval, Huygens, Isaac Newton, d'Alembert, L. Euler, J. Lagrange, N. E. Jukovski, A. Krîlov, Sofia Kovalevskaja și alții.

### 4. Importanța tehnică a cinematicii

Cinematica joacă un rol foarte mare în studiul construcției și funcționării diferitelor mecanisme și mașini utilizate în tehnică; cunoașterea caracteristicilor cinematice ale organelor de mașini în timpul funcționării lor joacă un rol deosebit la proiectarea și exploatarea lor, precum și la crearea de mașini noi, la îmbunătățirea și inventarea a noi mașini și dispozitive care să contribuie la executarea de operații tehnologice din ce în ce mai complexe, la automatizarea proceselor tehnologice.

Din acest motiv, aplicațiile tehnice ale cinematicii au luat în ultimele decenii o dezvoltare foarte mare, conducând chiar la apariția unei noi discipline, cunoscută sub denumirea de cinematica mecanismelor și a mașinilor, disciplină în care se studiază mișcările și construcția mecanismelor întâlnite în uzine, în mașinile de transport etc.

### 5. Noțiunile de bază ale cinematicii; unități de măsură

Noțiunile fundamentale ale cinematicii sînt *spațiul* și *tim-pul*; se presupune că există o unitate pentru măsurarea lungimilor, care, în condiții fizice neschimbate (aceeași temperatură, aceeași presiune etc.), păstrează o valoare independentă atât



de locul unde se face măsurătoarea cît și de starea cinematică (repaus sau mișcare) a obiectului măsurat. Aceasta înseamnă că, măsurînd același obiect în momente diferite și în locuri diferite, vom obține același rezultat dacă condițiile fizice arătate nu sînt diferite.

O altă presupunere care se face în cinematică este aceea că există un același timp pentru întreg spațiul, denumit *timp absolut*. Aceasta înseamnă că valoarea timpului nu depinde de faptul că un corp se află în repaus sau în mișcare sau de faptul că măsurarea timpului se efectuează față de un sistem de referință fix sau mobil.

Simultaneitatea pozițiilor ocupate de un sistem material în spațiu (sau a două fenomene mecanice oarecare) corespunde valorilor identice ale timpului, iar succesiunea lor corespunde valorilor diferite ale timpului; se zice că un fenomen precede un alt fenomen dacă valoarea timpului corespunzătoare primului fenomen este mai mică decît cea corespunzătoare celui de-al doilea fenomen; în caz contrar se zice că primul fenomen succede celui de-al doilea.

Măsurarea timpului se efectuează față de o origine a timpurilor aleasă arbitrar. Durata unui anumit fenomen este reprezentată de intervalul de timp corespunzător timpului la care el începe și celui la care sfîrșește; ea este egală cu diferența celor două valori ale timpului corespunzătoare începutului și sfîrșitului fenomenului considerat.

## 6. Sisteme de referință; mișcare absolută și relativă

Schimbarea poziției unui corp material în timp nu poate fi reperată decît față de alte corpuri materiale, care formează așa-numitele *sisteme de referință*.

În cinematică se presupune că există un sistem de referință imobil undeva în spațiu, denumit *sistemul de referință absolut* sau *reperul absolut*. Orice alt sistem de referință care este solidar cu reperul absolut sau fix în raport cu acesta este considerat de asemenea un sistem de referință fix.

Orice sistem de referință care nu este fix în raport cu reperul absolut este denumit în cinematică *sistem de referință mobil*. Mișcarea unui anumit corp material raportată la un sistem de referință fix este denumită în cinematică *mișcare absolută*; mișcarea unui corp material raportată la un sistem de referință mobil este denumită *mișcare relativă*.



La studiul mișcării diferitelor organe ale unei mașini, sistemul de referință fix este constituit în general de către batiul mașinii respective, drept sisteme de referință mobile putînd fi alese oricare dintre organele componente ale aceleiași mașini.

Astfel, la un strung poate fi ales drept sistem mobil sania care poartă cușitul, la o macara poate fi ales drept sistem mobil pisica ce se deplasează pe macara etc.

În tehnică prezintă o importanță deosebită atît studiul mișcării absolute cît și cel al mișcării relative ; cu ajutorul mișcării absolute și al celei relative se studiază modul în care se transmit mișcarea și forțele de la elementul conducător la cel condus, iar cu ajutorul mișcării relative se studiază pozițiile și mișcarea pe care o au între ele diferitele elemente ale unei mașini, precum și vitezele și accelerațiile lor relative care servesc mai departe la studiul șocurilor, al uzurii etc.

## 7. Poziție ; mișcare, repaus

Vom înțelege prin poziția unui sistem material la un moment dat *locul* pe care acesta îl ocupă în spațiu la momentul considerat. Poziția unui sistem material se determină față de un sistem de referință cu ajutorul unor mărimi geometrice care pot fi independente între ele sau nu.

Vom spune că poziția ocupată de sistemul material considerat este *fixă* față de un anumit sistem de referință sau că sistemul material respectiv se află în repaus față de același sistem de referință dacă mărimile geometrice care o caracterizează (unghiuri și distanțe) au valori constante.

Vom spune că poziția ocupată de sistemul material considerat este *variabilă* față de un sistem de referință sau că sistemul material respectiv se află în mișcare față de același sistem de referință dacă cel puțin unul din parametrii geometrici care o caracterizează este funcție de timp.

Ca exemplu să ne imaginăm un cursor  $C$  de formă paralelipedică, care se poate deplasa în lungul unei bare fixe  $Ox$  avînd de asemenea o formă paralelipedică (fig. 5.1,  $a$ ) ; cursorul este prevăzut cu un canal fără joc, care-i permite deplasarea în lungul barei. Poziția cursorului pe bară este determinată cu ajutorul unei singure mărimi geometrice : distanța  $x$ . Dacă această distanță are o valoare constantă (spre exemplu  $x = 0,5m$ ), cursorul ocupă o poziție fixă față de bară, adică se află în repaus față de bară ; dacă distanța  $x$  este funcție de timp

spre exemplu  $x = 2t^3 + 1$  ( $x$  în metri,  $t$  în secunde), el ocupă o poziție variabilă față de bară, adică se află în mișcare față de bară. Într-adevăr, pozițiile ocupate de cursor o dată cu trecerea timpului sînt cele arătate în tabela 5.1. (fig. 5.1, b).

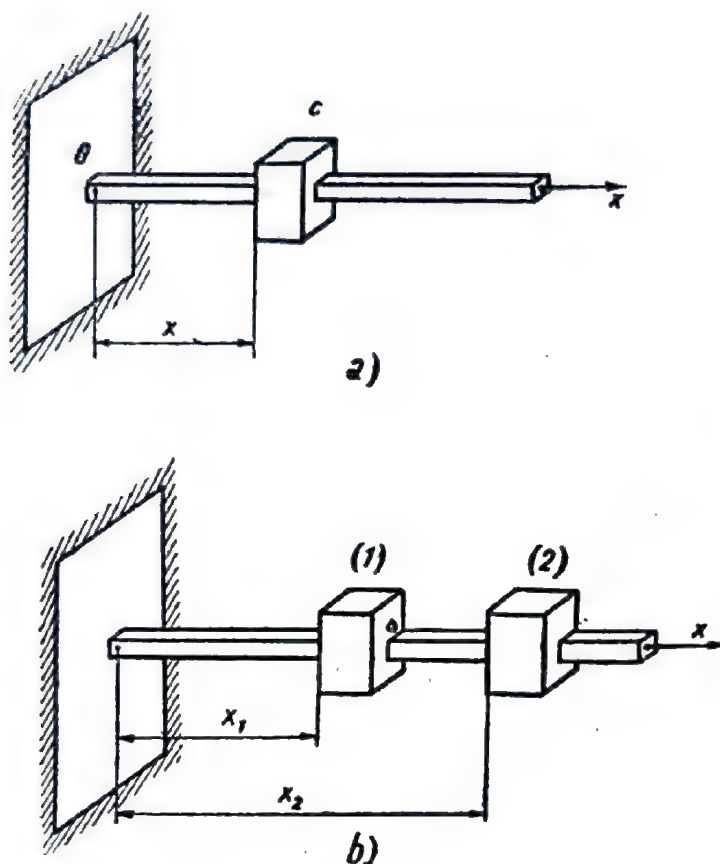


Fig. 5.1.

în cazul cursorului din figura 5.1, b două poziții oarecare sînt caracterizate de exemplu prin valorile  $x_1 = 1,5$  și  $x_2 = 3$ . Vom denumi prin convenție una dintre poziții *poziția inițială* (1), iar cealaltă *poziție finală* (2). Dacă parametrii geometrici care determină poziția sistemului material sînt funcții de timp, vom considera în general drept poziție finală pe aceea care corespunde unei valori a timpului mai mare în raport cu cea corespunzătoare poziției inițiale.

Tabela 5.1

Pozițiile ocupate de cursor în timp

Valoarea lui $t$	Distanța $x$ la care se află cursorul de punctul $o$
$t_0 = 0$	$x_0 = 1$
$t_1 = 1$	$x_1 = 3$
$t_2 = 2$	$x_2 = 17$



## 8. Deplasare

După cum am văzut, un sistem material poate ocupa în spațiu mai multe poziții la momente diferite. *Operația prin care un anumit sistem material este adus dintr-o poziție în alta se numește deplasare.* Un sistem material ocupă deci în timpul unei deplasări cel puțin două poziții, caracterizate prin valori distincte ale parametrilor geometrici care-i stabilesc poziția în spațiu. Dacă valorile tuturor mărimilor geometrice corespunzătoare la două poziții ocupate de sistemul material diferă între ele prin cantități finite, deplasarea corespunzătoare se numește *finită*; dacă însă valorile tuturor mărimilor geometrice care caracterizează poziția sistemului material diferă între ele prin cantități foarte mici, infinitezimale, deplasarea corespunzătoare se numește *infinitezimală*.

## 9. Traiectorie

În timpul efectuării unei deplasări dintr-o poziție în alta, punctele unui sistem material lasă în spațiu o serie de „urme”; dacă le-am putea materializa într-un fel oarecare, am constata că ele sînt niște curbe avînd uneori forme simple, alteori forme complicate. În cinematică, aceste „urme” poartă denumirea de *traietorii*. Vom înțelege deci prin *traietorie locul geometric al pozițiilor succesive ocupate în spațiu de un punct material aparținînd unui sistem care execută o deplasare față de un anumit sistem de referință.*

## 10. Viteză

Să considerăm un sistem material a cărui poziție în spațiu este caracterizată față de un sistem de referință printr-un număr oarecare de parametri geometrici (distanțe sau unghiuri); să presupunem că acest sistem material se află în mișcare. În acest caz, cel puțin una dintre mărimile geometrice care-i caracterizează poziția va fi o funcție de timp. Să alegem un unghi sau o distanță pe care să o notăm cu simbolul  $q$ . Vom avea deci :

$$q = f(t). \quad (5.1)$$



Să considerăm două valori distincte ale unghiului sau distanței  $q(q_1$  și  $q_2)$ , corespunzătoare la două valori ale timpului  $t(t_1$  și  $t_2)$  :

$$\begin{aligned} q_1 &= f(t_1), \\ q_2 &= f(t_2). \end{aligned}$$

Prin definiție, vom denumi *variație* a mărimii  $q$  diferența  $q_2 - q_1$ , și *viteză medie* raportul dintre variația mărimii  $q$  și intervalul de timp corespunzător acestei variații ; aceasta se scrie :

$$v_m = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} . \quad (5.2)$$

Trebuie remarcat că viteza medie este variabilă de la un interval de timp la altul, chiar dacă intervalele de timp sînt alese egale între ele. Astfel, pentru exemplul din figura 5.1, vitezele medii pe diferitele intervale de timp au valorile :

$$\begin{aligned} \text{pentru intervalul de timp } t_0=0, t_1=1: v_m &= \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{3-1}{1-0} = \\ &= 2 \text{ m/s,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pentru intervalul de timp } t_1=1, t_2=2: v_m &= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{17-3}{2-1} = \\ &= 14 \text{ m/s,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pentru intervalul de timp } t_0=2, t_2=0: v_m &= \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0} = \frac{17-1}{2-0} = \\ &= 8 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Este ușor de observat că *viteza medie a unui sistem material depinde de perechea de poziții considerată pentru sistemul respectiv*. Totodată, constatăm că ea ne dă o idee destul de vagă despre mișcarea sistemului respectiv, întrucît ea depinde de intervalul de timp sau de distanța dintre cele două poziții considerate ; cu cît aceste intervale sînt mai mari, cu atît cunoștințele noastre despre modul în care se desfășoară în timp deplasarea sistemului respectiv între cele două poziții sînt mai „globale“, mai aproximative. De aceea, pentru a obține o precizie mai mare în aprecierea deplasării unui sistem material între două poziții vom restrînge foarte mult intervalul de timp considerat. În acest fel, apare o altă noțiune importantă în cinematică, și anume aceea de *viteză instantanee* sau *viteză momentană* în momentul  $t$  ; ea este definită ca limita vitezei medii

atunci cînd intervalul de timp la care se raportează variația lui  $q$  este foarte mic, adică atunci cînd diferența  $t_1 - t$  tinde către zero sau, ceea ce este tot una, cînd  $t_1$  tinde către  $t$ :

$$v = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{q_1 - q}{t_1 - t}.$$

Dacă notăm diferența valorilor parametrului  $q_1 = q(t_1)$  și  $q = q(t)$  prin  $\Delta q (\Delta q = q_1 - q)$  și intervalul de timp prin  $\Delta t (\Delta t = t_1 - t)$ , expresia vitezei se mai scrie:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'. \quad (5.3)$$

Sub această formă observăm că *viteza instantanee sau momentană este derivata lui  $q$  în raport cu variabila  $t$ .*

Dacă mărimea care variază este o lungime, viteza corespunzătoare se numește *viteză liniară* sau simplu *viteză*; dacă mărimea care variază este un unghi, viteza corespunzătoare se numește *viteza unghiulară*.

Prima se măsoară în:

$$\frac{\text{unități de lungime}}{\text{unități de timp}}$$

adică m/s, km/h etc., iar cea de-a doua în:

$$\frac{\text{unități de unghi}}{\text{unități de timp}}$$

adică în rad/s.

În cazul exemplului de mai sus, viteza cursorului la un moment dat  $t$  este:

$$v = x' = 6t^2.$$

Valorile vitezei  $v$ , în m/s, la diferite momente  $t$  sînt trecute în tabela 5.2.

Aceste valori au fost determinate introducînd în expresia vitezei valorile corespunzătoare ale lui  $t$  trecute în coloana din stînga a tablei.

În cele de pînă aci a fost definită noțiunea de viteză

*Tabela 5.2*

Valorile vitezei cursorului în timp.

Valoarea lui $t$	Viteza cursorului
$t_0 = 0$	$v_0 = 0$
$t_1 = 1$	$v_1 = 6$
$t_2 = 2$	$v_2 = 24$

pentru fenomenele care formează obiectul de studiu al mecanicii : deplasarea corpurilor în spațiu unele față de altele. Noțiunea de viteză are însă o utilizare mult mai largă, atât în alte domenii ale științelor naturii cât și în tehnică, unde ea este folosită pentru a caracteriza modul de desfășurare în timp a diferitelor fenomene materiale. Vom întâlni astfel *viteza de scurgere* a unui fluid (în hidraulică, aerodinamică, termodinamică), *viteza de deformare* a unui material, *viteza de fluaj* (în rezistența materialelor), *viteza de depunere* a unei substanțe, *viteza de concentrare* a unei soluții (în chimie), *viteza de ardere* a unui combustibil (în termotehnică) ș.a.m.d.

În legătură cu noțiunea de viteză se întâlnesc în tehnică o serie de denumiri ale unor organe de mașini, mecanisme și aparate de măsură de mare însemnătate pentru activitatea practică ; câteva dintre ele sînt : *schimbător de viteză*, *cutie de viteze* (mecanisme servind la varierea vitezei, întrebuințate în construcția vehiculelor, mașinilor-unelte, mașinilor de ridicat și transportat etc.), *vitezometru* (aparat pentru măsurarea vitezei diferitelor organe mobile ale mașinilor ș.a.).

## 11. Accelerație

Să considerăm din nou același sistem material, precum și una dintre mărimile geometrice — unghi sau distanță-funcție de timp, care-i stabilesc poziția în spațiu  $q = q(t)$ . Să presupunem că vitezele corespunzătoare la două poziții ale sistemului material pentru o variație a parametrului  $q$  sînt :

- la timpul  $t_1$  :  $v_1 = q'(t_1)$ ,
- la timpul  $t_2$  :  $v_2 = q'(t_2)$ .

Prin definiție vom denumi *acelerație medie* a sistemului material pentru variația lui  $q$  raportul dintre variația vitezelor lui  $q$  și intervalul de timp corespunzător acestei variații :

$$a_m = \frac{q'(t_2) - q'(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (5.4)$$

Și în acest caz sînt valabile aceleași observații ca în cazul vitezei medii ; accelerația medie este variabilă de la un interval de timp la altul, chiar dacă intervalele de timp sînt alese egale



între ele. Astfel, pentru exemplul din figura 5.1 accelerațiile medii pe diferitele intervale au valorile :

— pentru intervalul de timp  $t_0 = 0$ ,

$$t_1 = 1 : a_m = \frac{q'(1) - q'(0)}{t_1 - t_0} = \frac{6 - 0}{1 - 0} = 6 \text{ m/s}^2,$$

— pentru intervalul de timp  $t_1 = 1$ ,

$$t_2 = 2 : a_m = \frac{q'(2) - q'(1)}{t_2 - t_1} = \frac{24 - 6}{1 - 0} = 18 \text{ m/s}^2,$$

— pentru intervalul de timp  $t_2 = 2$ ,

$$t_0 = 0 : a_m = \frac{q'(3) - q'(2)}{t_2 - t_0} = \frac{24 - 0}{2 - 0} = 12 \text{ m/s}^2.$$

Din aceleași considerente expuse în cazul vitezei medii, accelerația medie nu ne oferă o posibilitate suficient de exactă pentru a aprecia modul în care variază viteza unui anumit sistem material datorită variației uneia dintre mărimile geometrice care-i caracterizează poziția față de un sistem de referință.

De aceea, în cinematică se folosește o noțiune care oferă posibilitatea unei aprecieri mult mai exacte a mișcării denumită *accelerație instantanee* sau *accelerație momentană* la un anumit moment  $t$ . Ea este definită ca limita accelerației medii atunci când intervalul de timp la care se raportează variația vitezei  $q$  este foarte mic, adică atunci când diferența  $t_1 - t$  tinde către zero sau, ceea ce este tot una, când  $t_1$  tinde către  $t$ :

$$a = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{q'_{t_1} - q'_t}{t_1 - t}.$$

Dacă vom nota acum :

$$q'_{t_1} - q'_t = \Delta q',$$

$$t_1 - t = \Delta t,$$

expresia accelerației devine :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q'}{\Delta t} = q''^1. \quad (5.5)$$

Rezultă deci că accelerația instantanee sau momentană este cea de-a doua derivată a lui  $q$  în raport cu variabila  $t$ .

<sup>1</sup> Derivatele în raport cu timpul le vom nota în cele ce urmează cu un punct deasupra.

$$q' \equiv \dot{q} \quad q'' \equiv \ddot{q}.$$

Dacă parametrul care variază este o distanță, accelerația corespunzătoare se numește *accelerație liniară* sau simplu *accelerație*; dacă parametrul care variază este un unghi, accelerația corespunzătoare se numește *accelerație unghiulară*.

Accelerația liniară se măsoară în

$$\frac{\text{unități de viteză liniară}}{\text{unități de timp}},$$

adică  $\text{m/s}^2$  sau  $\text{km/s}^2$ , iar accelerația unghiulară în

$$\frac{\text{unități de viteză unghiulară}}{\text{unități de timp}},$$

adică în  $\text{rad/s}^2$ .

În cazul exemplului considerat, accelerația cursorului la un moment dat este:

$$a = x'' = 12t.$$

*Tabela 5.3*

Valorile accelerației cursorului în timp.

Valoarea lui $t$	Accelerația cursorului
$t_0 = 0$	$a_0 = 0$
$t_1 = 1$	$a_1 = 12$
$t_2 = 2$	$a_2 = 24$

Valorile accelerației  $a$ , în  $\text{m/s}^2$ , pentru diferite momente  $t$  sînt trecute în tabela 5.3.

Aceste valori au fost determinate introducînd în expresia accelerației valorile corespunzătoare ale lui  $t$  trecute în coloana din stînga a tabelului.

## 12. Studiul cinematic al mișcării mecanice

În general, un corp material se află în mișcare față de un anumit sistem de referință dacă acel corp își schimbă în mod continuu poziția în raport cu sistemul de referință considerat, o dată cu trecerea timpului. Pentru studiul cantitativ al mișcării mecanice a unui corp va trebui să cunoaștem modul în care variază în timp mărimile geometrice care determină poziția momentană a corpului respectiv, precum și viteza și accelerația fiecărui punct al său.

Din punct de vedere matematic, aceasta revine la a studia expresiile care dau valorile mărimilor geometrice de poziție

ale corpului ca funcții de timp, precum și derivatele lor pînă la ordinul doi inclusiv.

În general, aceste funcții le vom considera cunoscute sau vor fi deduse de noi pe considerente geometrice, fără a ne preocupa de modul în care ele apar ca o consecință a acțiunii forțelor exterioare asupra corpului respectiv; pe baza lor, vom studia *legea de distribuție* a vitezelor și accelerațiilor în punctele corpului respectiv.

### 13. Diagramele mișcării

Să considerăm din nou mărimile geometrice care determină poziția unui corp în spațiu și care în timpul mișcării corpului respectiv sînt funcții de timp,  $q = q(t)$ . Să alegem un sistem de axe de coordonate care are pe ordonată valorile funcției  $q$ , iar pe abscisă valorile timpului  $t$  și să reprezentăm grafic funcția  $q = q(t)$ ; vom obține o curbă, a cărei formă depinde de expresia acestei funcții. Cu ajutorul acestei curbe vom putea determina valoarea lui  $q$  pentru o valoare dată a timpului  $t$ .

Dar nu numai mărimea  $q$  poate fi reprezentată într-o asemenea diagramă, ci și derivatele sale care, în general, sînt tot funcții de timp; vom putea alcătui deci și diagramele lor, din care putem afla valorile vitezei și ale accelerației de variație a parametrului respectiv în orice moment.

Reprezentările grafice  $q = q(t)$ ,  $\dot{q} = q'(t)$  și  $\ddot{q} = \ddot{q}(t)$  joacă un rol foarte important în cinematică, întrucît oferă o imagine foarte sugestivă a mișcării; ele sînt denumite *diagramele mișcării*. O utilizare curentă a acestor diagrame o găsim la căile ferate, unde servesc la reprezentarea grafică a mișcării trenurilor, în scopul stabilirii duratelor de staționare, a locurilor de întîlnire etc.

### 14. Mișcarea uniformă

În continuare vom studia cîteva tipuri de mișcări; pentru aceasta va trebui să cunoaștem forma funcției  $q = q(t)$ . Teoretic, această funcție poate avea, după cîte cunoaștem din matematică, forme destul de variate: polinoame, funcții trigonometrice, funcții logaritmice etc. Practica arată însă că nu este cazul să studiem toate aceste forme de funcții, întrucît în teh-



nică intervin cîteva funcții avînd o formă simplă. Una din aceste forme simple o constituie funcția :

$$q = At + B, \quad (5.6)$$

unde  $A$  și  $B$  sînt două constante.

Derivatele acestei funcții au expresiile :

$$v = q' = A, \quad (5.7)$$

$$a = q'' = 0. \quad (5.8)$$

Ele reprezintă respectiv viteza  $v$  și accelerația  $a$  datorite variației parametrului  $q$ .

Reprezentarea grafică a acestor funcții pentru cazul  $A > 0$ ,  $B > 0$  este arătată în figura 5.2. Funcția  $q = q(t)$  este reprezentată printr-o dreaptă înclinată față de axa  $Ot$ , întrucît ea este un polinom de gradul I în  $t$ ; aceasta înseamnă că parametrul  $q$  crește proporțional cu timpul. Funcția  $v = q'(t)$  este reprezentată printr-o dreaptă paralelă cu axa  $Ot$ ; aceasta înseamnă că valoarea funcției  $\dot{q}$  rămîne mereu aceeași. Funcția  $a = q''(t)$  este reprezentată chiar prin axa  $Ot$  a diagramei, deoarece ea rămîne tot timpul nulă.

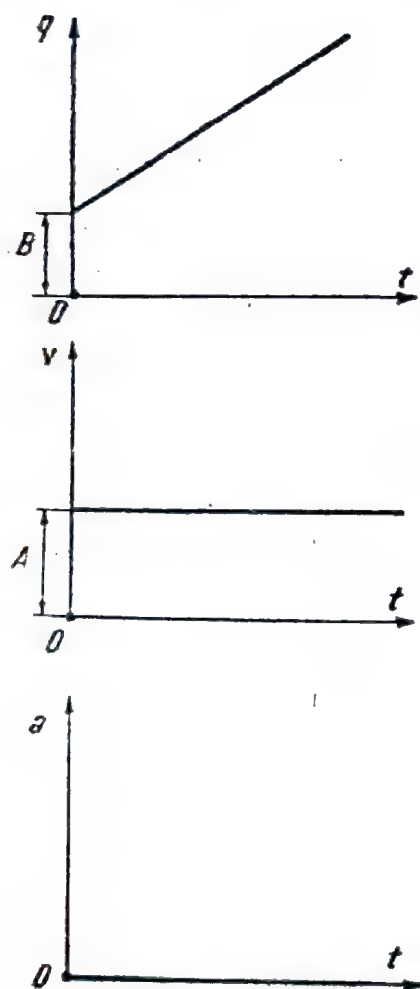


Fig. 5.2.

Să căutăm semnificația constantelor  $A$  și  $B$ . Din expresia lui  $\dot{q}$  se vede că constanta  $A$  reprezintă viteza de variație a parametrului  $q$ . Pentru a găsi semnificația constantei  $B$  să observăm că dacă în expresia lui  $q = q(t)$  facem  $t = 0$ , obținem  $q = B$ ; constanta  $B$  reprezintă deci valoarea lui  $q$  în momentul inițial, adică cînd  $t = 0$ ; această valoare o vom denumi *spațiu inițial*. Din punct de vedere fizic, spațiul inițial reprezintă depărtarea (distanța sau unghiul) la care se află mobilul față de originea de la care se măsoară valorile parametrului  $q$  în momentul inițial (la  $t = 0$ ).

Mișcarea reprezentată prin funcția  $q = q(t)$  dată de formula (5.6) este denumită în cinematică *mișcare uniformă*. Ea pre-

zintă o deosebită importanță tehnică, întrucât organele rotative ale mașinilor au în timpul mișcărilor de regim mișcări uniforme sau mișcări care se apropie foarte mult de mișcarea uniformă.

**Exemplu.** Să presupunem că funcția  $q = q(t)$  are expresia :

$$q = 3t + 5. \quad (5.9)$$

Mărimea  $q$  poate reprezenta orice mărime geometrică ce caracterizează poziția unui corp în spațiu, ca de exemplu (fig. 5.3) : distanța de la un stâlp  $O$  la omul care se deplasează pe o stradă rectilinie (*a*), unghiul făcut de una din spițele unei roți de la o transmisie cu curele cu o dreaptă fixă (*b*), lungimea arcului șinei de cale ferată parcurs de un tren aflat în mișcare pe o șină avînd atît porțiuni drepte cît și curbe, măsurată de la anumită stație  $O$  de pe traseu (*c*).

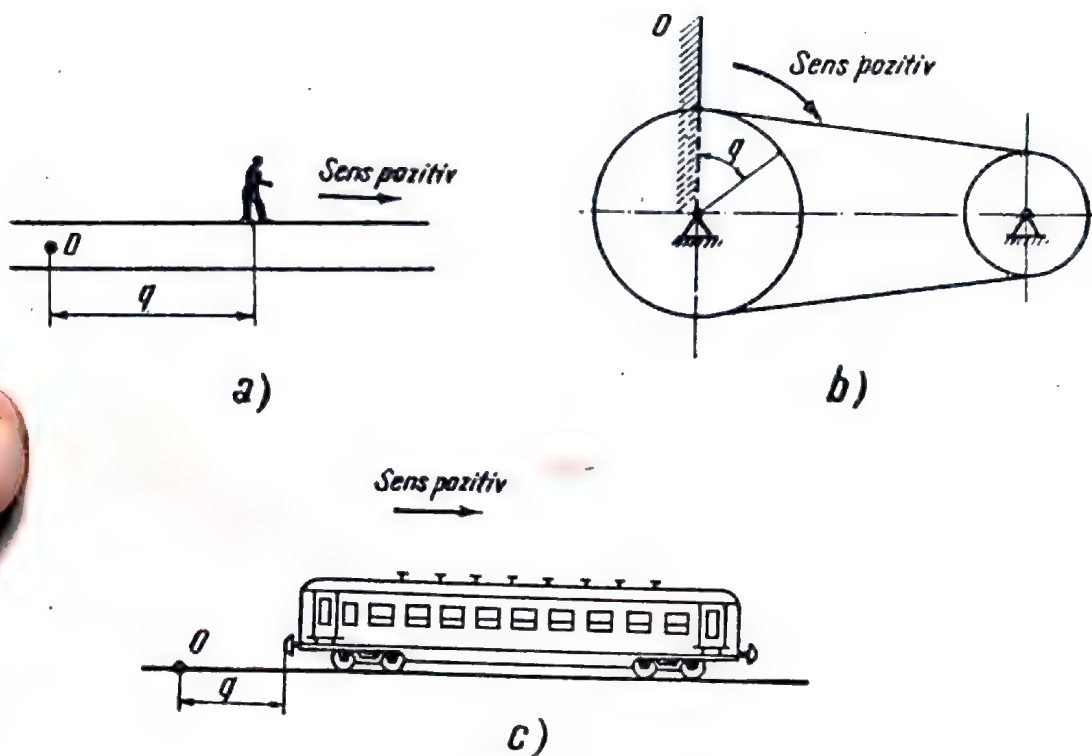


Fig. 5.3.

Din expresia funcției  $q$  tragem concluzia că în momentul cînd începe mișcarea ( $t = 0$ ) parametrul  $q$  are valoarea  $B = 5$  (metri sau radiani, după cum ele reprezintă o distanță sau un unghi). Această valoare reprezintă distanța la  $t = 0$  a omului față de stîlp, a trenului față de gară sau unghiul la pornire dintre dreapta fixă și dreapta trasată pe roata de curea.

Constanta  $A$  are în acest caz valoarea  $A = 3$  (m/s sau rad/s). Această valoare reprezintă viteza constantă de deplasare a omului, a trenului sau viteza unghiulară de rotație a roții de la transmisia cu curea.

În concluzie, toate corpurile din figura 5.3 au mișcări uniforme care încep cu valoarea inițială  $q = 5$  (m sau rad) și se desfășoară cu o viteză constantă egală cu 3 (m/s sau rad/s). Diagramele de variație ale lui  $q$  sînt reprezentate în figura 5.2 unde vom înlocui  $A = 3$ ,  $B = 5$ .

Dacă dorim să aflăm care este poziția corpurilor din figura 5.3 după trecerea unui anumit timp (să zicem  $t = 4$  s,) marcăm această valoare pe axa  $Ot$  și din punctul astfel obținut ridicăm o perpendiculară pe axa  $Ot$  pînă la intersecția cu diagrama; lungimea acestei perpendiculare reprezintă valoarea parametrului  $q$  la timpul  $t = 4$ . Ea mai poate fi determinată și analitic introducînd valoarea lui  $t$  în expresia (5.9); obținem:

$$q(4) = 3 \times 4 + 5 = 17 \text{ (m sau rad)}.$$

Înainte de a încheia analiza mișcării uniforme, observăm că mărimile  $A$  și  $B$  din expresia (5.6) pot avea și valori negative sau nule. Faptul că mărimea  $A$  (viteza de variație a lui  $q$ ) este negativă înseamnă că  $q$  descrește; corpurile din figura 5.3 se mișcă în sensul invers sensului pozitiv pe această figură. Faptul că mărimea  $B$  (valoarea inițială a lui  $q$ ) este negativă înseamnă că corpul respectiv ocupă o poziție spre sensul negativ al valorilor parametrului: omul se află în stînga stîlpului  $O$ , raza de pe roata de curea se află în stînga drepte fixe de referință, trenul se află în stînga gării.

Dacă  $A = 0$ , atunci  $q = B$ , ceea ce înseamnă că mărimea  $q$  are o valoare constantă adică de fapt corpul nu se mișcă ci rămîne fix la depărtarea  $B$  de origine; dacă  $A = B = 0$  corpul rămîne fix în origine. Diagramele din figura 5.2 au fost construite pentru cazul  $A > 0$ ,  $B > 0$ .

## 15. Mișcarea uniform variată

Să examinăm mișcarea unei pietre care cade; în timpul acestei căderi, viteza pietrei nu mai rămîne constantă ca în cazul mișcării uniforme, ci crește din ce în ce. După cîte știm din fizică, spațiul parcurs de piatra în cădere crește cu pătratul timpului și nu proporțional cu timpul, ca în cazul mișcării uniforme. Asemenea mișcări se numesc *mișcări uniform variate*.



Mărimile geometrice  $q$  care caracterizează pozițiile corpurilor care au mișcări uniform variate au expresia :

$$q = At^2 + Bt + C, \quad (5.10)$$

care reprezintă un polinom de gradul al doilea în  $t$ .

Derivatele acestei funcții au expresiile :

$$\begin{aligned} v = \dot{q} &= 2At + B, \\ a = \ddot{q} &= 2A. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ele reprezintă respectiv viteza de variație și accelerația de variație a lui  $q$ .

Reprezentarea grafică a acestor funcții pentru cazul  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $C > 0$  este arătată în figura 5.4. Funcția  $q = q(t)$  este reprezentată printr-o parabolă avînd concavitătea îndreptată în sus, întrucît ea este un polinom de gradul al doilea în  $t$ ; aceasta înseamnă că parametrul  $q$  variază în mod diferit față de cazul mișcării uniforme, unde el creștea sau descreștea proporțional cu timpul. Funcția  $v = \dot{q}(t)$  este reprezentată printr-o dreaptă înclinată față de axa  $Ot$ ; aceasta înseamnă că viteza crește (sau descrește) proporțional cu timpul; cu cît timpul trece cu atît viteza devine mai mare (sau mai mică). Funcția  $a = \ddot{q}(t)$  este reprezentată printr-o paralelă la axa  $Ot$ , ceea ce înseamnă că accelerația este o constantă.

Să căutăm semnificația fizică a constantelor  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Din expresia lui  $a$  se vede că constanta  $A$  reprezintă jumătate din accelerație ( $A = \frac{\ddot{q}}{2}$ ). Dacă în expresia lui  $v$  facem  $t=0$  obținem  $v=B$ , ceea ce înseamnă că constanta  $B$  reprezintă viteza inițială (viteza la  $t=0$ ). Dacă acum facem  $t=0$  în expresia lui  $q$ , obținem  $q=C$ , adică constanta  $C$  reprezintă spațiul inițial.

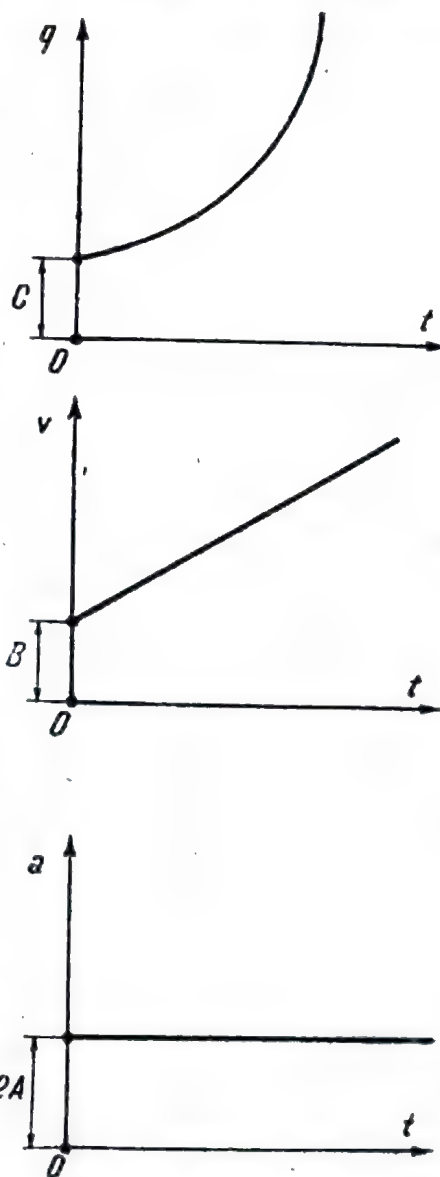


Fig. 5.4

Mărimile  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pot fi pozitive, negative sau nule.

Remarcăm faptul că dacă  $A = 0$  avem cazul studiat mai înainte al mișcării uniforme. Diagramele din figura 5.4 au fost construite pentru cazul cînd toate cele trei constante  $A$ ,  $B$  și  $C$  sînt pozitive.

Dacă la un moment dat  $t$ , în timpul mișcării, produsul dintre  $v$  și  $a$  este pozitiv ( $va > 0$ ), ceea ce revine la a spune că mărimile  $v$  și  $a$  sînt sau ambele pozitive sau ambele negative (au același semn), mișcarea respectivă se numește *uniform accelerată*, iar în caz contrar *uniform întîrziată*. Într-adevăr, în primul caz corpul respectiv se mișcă din ce în ce mai repede în sensul creșterii parametrului  $q$  dacă atît  $v$  cît și  $a$  sînt pozitivi, sau în sens contrar creșterii parametrului  $q$  dacă  $v$  și  $a$  sînt amîndoi negativi, iar în cel de-al doilea caz, el se mișcă din ce în ce mai încet pînă se oprește.

Mișcarea uniform variată prezintă de asemenea o mare importanță pentru tehnică; într-adevăr, după cîte știm din practică, orice mașină pentru a fi adusă la mișcarea de regim trebuie accelerată din starea de repaus pînă la turația de regim, iar pentru a fi oprită trebuie ca să se micșoreze din ce în ce viteza; în timpul acestor două perioade, organele mobile ale mașinilor au în general mișcări uniform accelerate sau uniform întîrziate.

**Exemple.** Volantul unei mașini se mișcă astfel încît unghiul  $q$  dintre o dreaptă fixă și o rază trasată pe el variază după legea :

$$q = 5t^2 + 2.$$

În acest caz, coeficienții din formula (5.10) au valorile  $A = 5$ ,  $B = 0$ ,  $C = 2$ , adică putem spune că volantul se mișcă uniform accelerat cu accelerația  $5 \times 2 = 10$  rad/s<sup>2</sup> plecînd din repaus, adică fără viteză inițială (deoarece  $B = 0$ ) și astfel încît el are un spațiu în momentul plecării de 2 rad (spațiul inițial). Viteza unghiulară a volantului este variabilă cu timpul :  $v = 10t$  rad/s. Diagramele de mișcare ale volantului sînt cele din figura 5.4, în care se înlocuiesc valorile constantelor  $A$ ,  $B$  și  $C$  cu cele arătate mai sus.

Un exemplu de mișcare uniform variată îl constituie — după cum am văzut mai sus — căderea liberă a corpurilor pe verticală. Distanța  $q$  măsurată pe verticală este dată de expresia :

$$q = \frac{gt^2}{2}.$$



Dacă aruncarea se face fără viteză inițială din locul unde se află originea distanțelor  $q$  avem :

$$v = \dot{q} = gt, \quad a = \ddot{q} = g,$$

$g$  fiind accelerația gravitației.

Dacă se elimină timpul între expresia lui  $v$  și cea a lui  $q$  se obține:

$$v = \sqrt{2gq}, \quad (5.12)$$

expresie cunoscută din fizică sub numele de *formula lui Torricelli*.

## 16. Mișcarea oscilatorie armonică

În tehnică întâlnim o serie de organe de mașini pe care, după trecerea unui anumit timp, le regăsim în aceeași poziție, ca de exemplu pistonul unui motor cu explozie, vătala unui război de țesut, scula prelucrătoare de la raboteză ș.a. Aceste organe efectuează ceea ce se numește în cinematică o *mișcare periodică*. Mărimile geometrice (unghiuri sau distanțe) care caracterizează poziția lor sînt funcții periodice de timp. Asemenea funcții se caracterizează prin aceea că după o anumită valoare a timpului, denumită *perioadă*, își recapătă o valoare avută anterior, ceea ce înseamnă că corpul își ocupă din nou, după trecerea unui anumit timp, o poziție avută anterior, avînd aceeași viteză și aceeași accelerație.

Într-adevăr, după trecerea timpului necesar efectuării unei curse, regăsim pistonul unui motor în aceeași poziție, avînd aceeași viteză și aceeași accelerație.

Funcțiile care descriu asemenea mișcări se numesc *funcții periodice*; ele se bucură de proprietatea că după un anumit interval de variație a variabilei independente, denumit *perioadă*, ele își recapătă aceleași valori. O asemenea funcție este funcția trigonometrică  $\sin x$ , pentru care avem :

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \dots = \sin(x + 2k\pi).$$

Tot funcții periodice sînt și funcțiile  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$  ș.a.

Să presupunem că poziția unui organ de mașină (o culisă, o manivelă, un volant) este determinată cu ajutorul unui unghi



sau al unei distanțe a cărei expresie ca funcție de timp este dată de relația :

$$q = A \sin (\omega t + \varphi), \quad (5.13)$$

în care mărimile  $A$ ,  $\omega$  și  $\varphi$  sînt niște constante a căror semnificație fizică o vom vedea în cele ce urmează.

Derivatele acestei funcții au expresiile :

$$v = \dot{q} = A \omega \cos (\omega t + \varphi), \quad (5.14)$$

$$a = \ddot{q} = -A \omega^2 \sin (\omega t + \varphi) = -\omega^2 q. \quad (5.15)$$

Ele reprezintă, la fel ca și pentru celelalte mișcări studiate pînă aci, viteza și accelerația de variație a parametrului  $q$ .

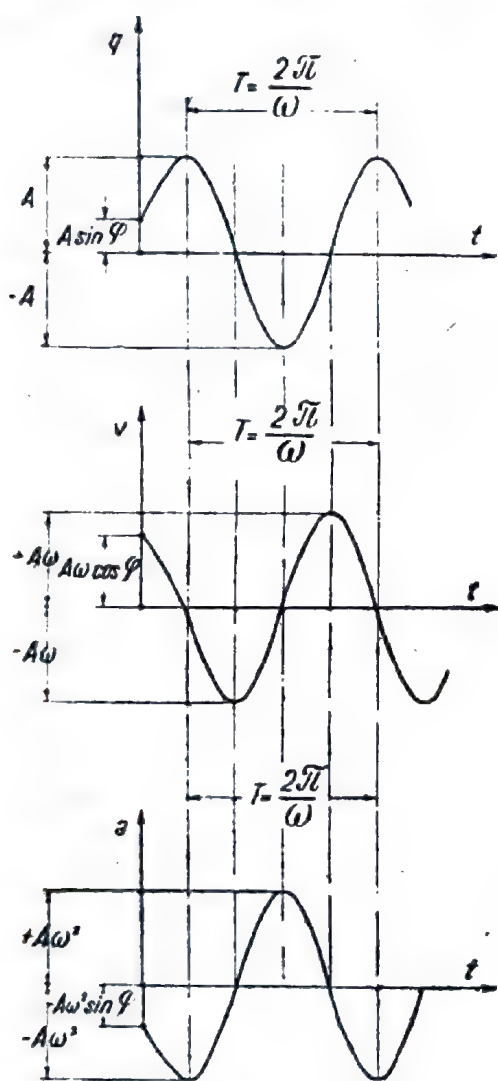


Fig. 5.5.

Reprezentarea grafică a acestor funcții este arătată în figura 5.5. Funcția  $q = q(t)$  este reprezentată printr-o sinusoidă de amplitudine  $A$  și de perioadă  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , care nu trece în general prin punctul  $O$ ; funcția  $v = \dot{q}(t)$  se reprezintă printr-o cosinusoidă de amplitudine  $A\omega$ , de aceeași perioadă, care de asemenea nu trece în cazul general prin originea  $O$ ; funcția  $a = \ddot{q}(t)$  nu este altceva decît tot funcția  $q = \dot{q}(t)$ , ale cărei ordonate au fost amplificate cu mărimea  $\omega$  și li s-a schimbat semnul.

Caracteristica generală a acestor mișcări o constituie faptul că atît mărimea  $q$  cît și viteza  $v$  și accelerația  $a$  nu pot căpăta valori infinite, ca în cazul celorlalte mișcări studiate mai sus, ci, după trecerea unui timp egal cu perioada, ele recapătă valorile avute anterior.

<sup>1</sup> Mărimea  $f = \frac{1}{T}$  care reprezintă numărul de perioade în unitatea de timp poartă denumirea de *frecvența mișcării*.

Să căutăm acum semnificația fizică a constantelor  $A$ ,  $\omega$  și  $\varphi$ . Pentru aceasta, observăm mai întâi că valorile extreme ale lui  $\sin(\omega t + \varphi)$  nu pot fi decât  $+1$  sau  $-1$ ; rezultă că valorile extreme ale lui  $q$  sînt  $+A$  și  $-A$ ; am găsit astfel semnificația fizică a constantei  $A$ ; ea reprezintă valoarea maximă a lui  $q$ , sau cum se mai numește în fizică, *amplitudinea mișcării*. Corpul a cărui poziție este determinată de mărimea  $q$  avînd expresia (5.13) nu poate ocupa nici o poziție pentru care ar corespunde valori ale lui  $q$  mai mari decât  $A$ .

Constanta  $\varphi$  poartă denumirea de *fază inițială*; ea joacă aci rolul spațiului inițial din cazul mișcării uniforme sau uniform variate, deoarece pentru

$t = 0$  avem  $q_0 = A \sin \varphi$ , ceea ce se observă de altfel și pe diagrama  $q = q(t)$  din figura 5.5. Constanta  $\omega$  poartă denumirea de *pulsatie* sau *viteză unghiulară a mișcării*. Ultima denumire provine de la faptul că dacă am considera un punct oarecare  $M$  care s-ar mișca pe un cerc astfel încît unghiul  $\alpha$  care-i determină poziția să fie dat de expresia :

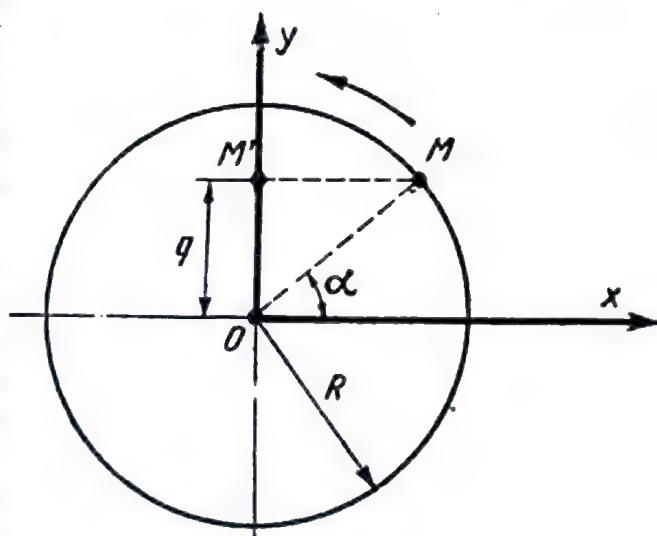


Fig. 5.6.

$$\alpha = \omega t + \varphi, \quad (5.16)$$

adică ar descrie o mișcare circulară uniformă, atunci proiecția sa  $M'$  pe diametrul vertical se mișcă după legea :

$$q = OM \sin \alpha = R \sin(\omega t + \varphi), \quad (5.17)$$

adică ar descrie o mișcare rectilinie oscilatorie armonică cu amplitudine  $R$  (fig. 5.6). Mărimea  $\omega$  din expresia (5.16) reprezintă viteza de variație a unghiului  $\alpha$  sau viteza unghiulară a mișcării punctului  $M$ .

Mișcarea reprezentată prin funcția  $q = A \sin(\omega t + \varphi)$  sau  $q = A \cos(\omega t + \varphi)$  este denumită în cinematică *mișcare oscilatorie armonică*; ea constituie un caz particular de mișcare periodică. Mișcarea oscilatorie armonică prezintă o importanță tehnică deosebită, deoarece foarte multe organe mobile ale mașini-

lor descriu mișcări periodice oscilatorii armonice sau care pot fi approximate cu mișcări oscilatorii armonice; astfel, mișcarea unui tachtet acționat de o camă, mișcarea pistonului unui mecanism bielă-manivelă, mișcarea unei greutate atârnată liber de un resort constituie numai câteva exemple de mișcări periodice întâlnite în tehnică.

**Exemple.** Să considerăm mecanismul din figura 5.7, *a*, format din bara  $OA$ , de lungime  $l$ , care se poate roti în jurul articulației  $O$  și care este articulată în cealaltă extremitate  $A$  cu o bară  $AB$  avînd aceeași lungime  $l$ ; bara  $AB$  este articulată în extremitatea  $B$  cu o culisă, care se deplasează într-un șanț rectiliniu fix. Acest mecanism este folosit pentru ghidarea ușilor unor tramvaie ale I.T.B. Să studiem mișcarea culisei  $B$ . Pentru aceasta, observăm că poziția acestei culise în ghidajul său este determinată de distanța  $OB = q$  în timp ce poziția barei  $OA$  care transmite mișcarea întregului mecanism este determinată de unghiul  $\alpha$ .

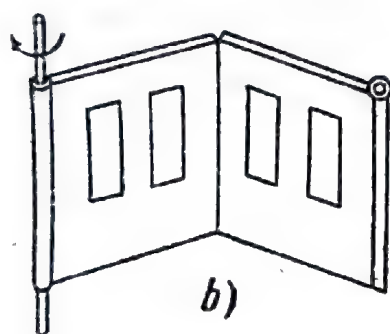
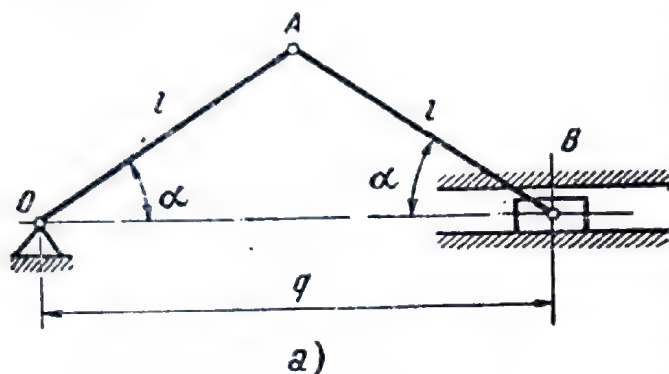


Fig. 5.7.

Să presupunem că bara  $OA$  are o mișcare uniformă; aceasta înseamnă că unghiul  $\alpha$  care-i determină poziția variază după legea (5.6) :

$$\alpha = \omega t + \alpha_0,$$

în care  $\omega$  este viteza de variație a lui  $\alpha$  (viteza unghiulară a barei  $OA$ ),  $\alpha_0$  valoarea lui  $\alpha$  în momentul începerii mișcării, iar  $t$  timpul. Mărimile  $\omega$  și  $\alpha_0$ , sînt cunoscute. În acest caz, valoarea mărimii  $q$  care determină poziția culisei este dată de expresia :

$$q = OB = OA \cos \alpha + AB \cos \alpha = 2l \cos \alpha = 2l \cos (\omega t + \alpha_0)$$

(deoarece triunghiul  $OAB$  este isoscel, avînd  $\sphericalangle BOA = \sphericalangle ABO = \alpha$ ).



Culisa articulată în punctul  $B$  descrie deci o mișcare oscilatorie armonică, care are amplitudinea  $A = 2l$ , pulsația egală cu viteza unghiulară a barei  $OA$ , iar faza inițială este  $\varphi = \alpha_0$ , valoarea inițială a unghiului  $\alpha$ . Diagramele mișcării culisei sînt cele din figura 5.5 în care s-au înlocuit  $A = 2l$  și  $\varphi = \alpha_0$ .

## Capitolul VI

### CINEMATICA SISTEMELOR MATERIALE IN RAPORT CU UN REPER FIX

#### 1. Cinematica punctului material

Cel mai simplu sistem material cu studiul mișcării căruia se ocupă cinematica este *punctul material*; cunoșterea modului în care se determină poziția, deplasarea, traiectoria, viteza și accelerația unui punct material precum și a modului în care se alcătuiesc diagramele mișcării acestuia constituie noțiunile de bază pentru studierea mișcării solidului rigid și a sistemelor de solide rigide. În cinematică, punctul material este reprezentat printr-un punct geometric (figura geometrică fără nici o dimensiune), care poate ocupa diferite poziții în spațiu o dată cu trecerea timpului; el corespunde acelor corpuri din natură ale căror dimensiuni în raport cu cele ale sistemului de referință sînt neglijabile sau acelor corpuri pentru care vitezele în diferitele puncte ale lor nu diferă prea mult între ele.

a) **Mișcarea curbilinie.** *Determinarea poziției.* Să considerăm un punct oarecare  $M$  aflat în spațiu; poziția sa față de un anumit sistem de referință  $Oxyz$  este complet determinată prin trei coordonate (numere)  $x, y, z$  care pot avea orice valori; vom spune deci că *un punct  $M$  liber în spațiu are trei grade de libertate*. Dacă cele trei coordonate ale punctului  $M$  au valori constante, punctul ocupă o poziție fixă în spațiu; dacă cel puțin una dintre ele este o funcție de timp, punctul  $M$  va ocupa, o dată cu trecerea timpului, diferite poziții în spațiu. Unind între ele printr-o curbă continuă toate aceste poziții, vom obține *traiectoria* punctului  $M$ . Pe această traiectorie, punctul  $M$  se mișcă cu o anumită viteză și accelerație.

Vom spune că am determinat mișcarea unui punct material dacă vom cunoaște traiectoria sa, viteza și accelerația în orice moment.

În cele ce urmează vom considera că sînt cunoscute coordonatele punctului  $M$  ca funcții de timp.

Un exemplu practic de mișcare a unui corp care poate fi considerat punct material îl constituie mișcarea oalei cu metal fierbinte dintr-o turnătorie; această oală este deplasată dintr-un punct într-altul al halei cu ajutorul cîrligelor de macara ale unui pod rulant. Muncitorul care manevrează motoarele podului rulant poate face ca pe rînd sau simultan să varieze una, două sau toate cele trei coordonate ale punctului  $M$  (oala cu metal), obligînd-o pe aceasta să descrie cele mai diferite traiectorii prin spațiul halei, după necesitățile procesului tehnologic respectiv, privind umplerea cu metal a diferitelor forme aflate în hală.

*Traietorie.* Pentru a determina traiectoria punctului mobil cunoscînd coordonatele sale ca funcții de timp, vom da varia-

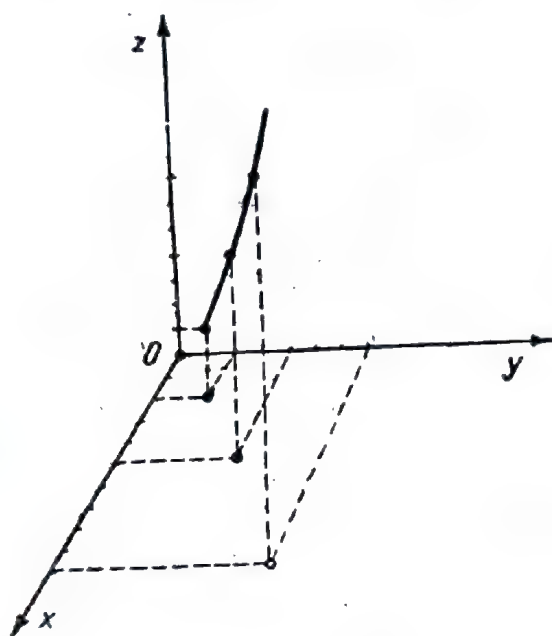


Fig. 6.1.

*Tabela 6.1*  
Valorile coordonatelor  
punctului  $M$

$t$	$x$	$y$	$z$
1	2	2	1
2	5	4	4
3	10	6	7

bilei  $t$  diferite valori și apoi vom reprezenta în spațiu coordonatele punctului mobil la momentele respective. Astfel, dacă punctul  $M$  are coordonatele date de expresiile :

$$x = t^2 + 1, \quad y = 2t, \quad z = 3t - 2, \quad (6.1)$$

vom putea alcătui o tabelă de forma tabelii 6.1, cu ajutorul căreia putem reprezenta fața de sistemul de coordonate considerat diferitele poziții ale punctului mobil; unindu-le între ele, căpătăm traiectoria punctului (fig. 6.1).

*Viteza.* Pentru a studia mișcarea punctului  $M$ , să considerăm trei poziții pe traiectoria sa: poziția  $M_0$  corespunzătoare valorii timpului  $t=0$ , poziția  $M$  corespunzătoare unei valori oarecare  $t$  a timpului și ultima  $M_1$ , corespunzătoare valorii  $t+\Delta t$  a timpului; în care  $\Delta t$  reprezintă intervalul de timp necesar ajungerii din poziția  $M$  în poziția  $M_1$ . Fiecare din aceste poziții este determinată la momentul respectiv prin anumite valori particulare ale mărimilor  $x$ ,  $y$  și  $z$  (coordonatele punctului); astfel avem (fig. 6.2):

- pentru poziția  $M_0$ :  $x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$
  - pentru poziția  $M$ :  $x = x, \quad y = y, \quad z = z,$
  - pentru poziția  $M_1$ :  $x_1 = x + \Delta x$   
 $y_1 = y + \Delta y$   
 $z_1 = z + \Delta z.$
- (6.2)

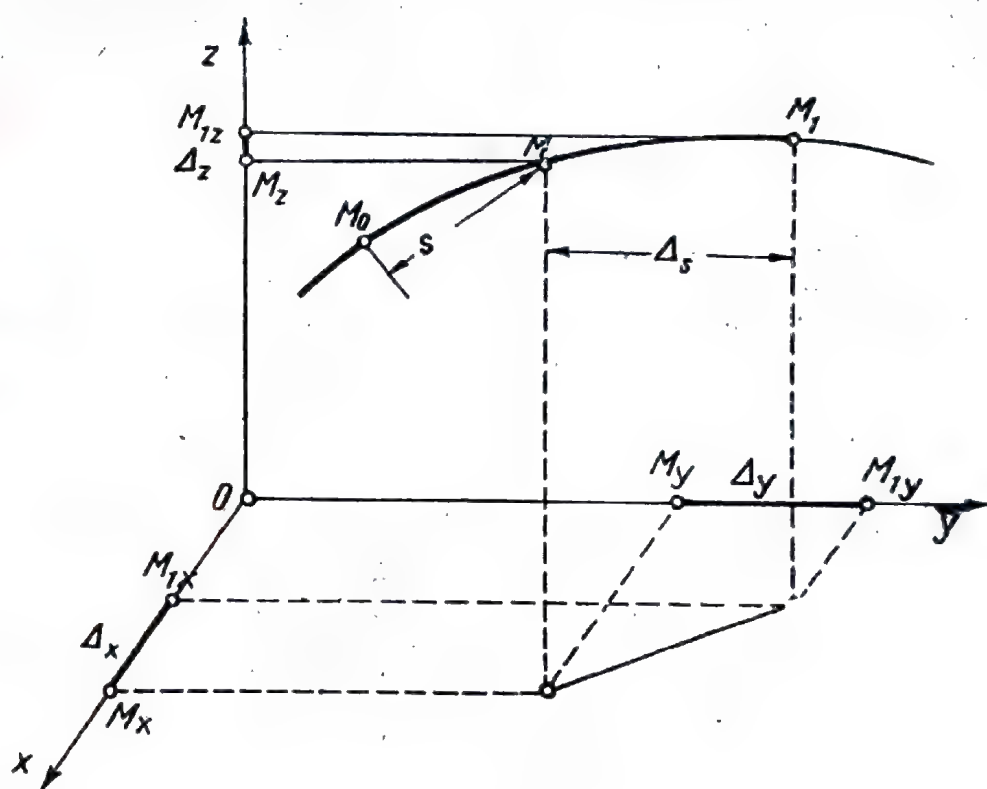


Fig. 6.2.

Viteza medie a punctului mobil între pozițiile  $M$  și  $M_1$  este prin definiție raportul dintre drumul parcurs și timpul corespunzător acestei parcurgeri:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (6.3)$$



Să presupunem că arcul de curbă  $MM_1$  este destul de mic ; în acest caz, el poate fi înlocuit în mod aproximativ cu coarda  $MM_1$ . Dacă proiectăm acum această coardă pe cele trei axe de coordonate, vom obține :

$$\begin{aligned}(\text{pr } MM_1)_{Ox} &= \Delta x \\(\text{pr } MM_1)_{Oy} &= \Delta y \\(\text{pr } MM_1)_{Oz} &= \Delta z.\end{aligned}\tag{6.4}$$

O dată cu punctul  $M$  se mișcă și punctele  $M_x, M_y, M_z$ , care sînt proiecțiile punctului  $M$  pe cele trei axe.

Deplasării punctului din  $M$  în  $M_1$  îi corespund trei deplasări  $M_xM_{1x} = \Delta x$ ,  $M_yM_{1y} = \Delta y$ ,  $M_zM_{1z} = \Delta z$ , pe cele trei axe de coordonate.

Vitezele în mișcarea acestor trei puncte se obțin raportînd drumurile parcurse la timpul  $\Delta t$  corespunzător acestei parcurgeri :

$$v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad v_{mz} = \frac{\Delta z}{\Delta t}.\tag{6.5}$$

Să presupunem acum că punctul  $M_1$  se apropie foarte mult de punctul  $M$  ; mărimile  $\Delta s$  și  $\Delta t$  vor tinde către zero, dar rapoartele din relațiile (6.5) vor tinde către anumite limite, în general, bine determinate. Astfel vom avea :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.\tag{6.6}$$

$$\left. \begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{mx} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{my} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{mz} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\end{aligned}\right\}\tag{6.7}$$

Mărimile  $v_x, v_y, v_z$  pot fi considerate drept proiecțiile unui vector  $v$  situat pe tangenta în  $M$  la traiectoria acestui punct, denumit vectorul viteză (fig. 6.3). El se află pe tangentă la traiectorie deoarece la limită, cînd  $M_1$  tinde către  $M$ , coarda  $MM_1$  devine tangentă la traiectorie. Modulul vectorului viteză se calculează cu formula cunoscută :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.\tag{6.8}$$

Unghiurile făcute de vectorul viteză cu axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sînt date de relațiile :

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{v_x}{v}, \\ \cos \beta &= \frac{v_y}{v}, \\ \cos \gamma &= \frac{v_z}{v}.\end{aligned}\tag{6.9}$$

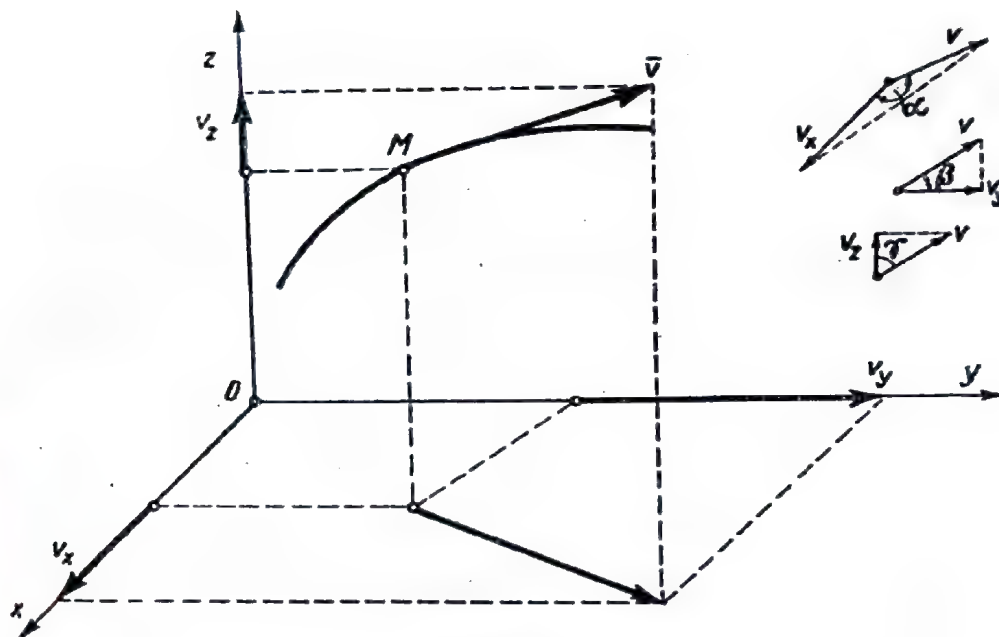


Fig. 6.3.

*Accelerația.* Să derivăm cele trei proiecții ale vectorului viteză ; vom obține trei mărimi  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  care au valorile :

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.\end{aligned}\tag{6.10}$$

Ele pot fi considerate de asemenea proiecțiile unui alt vector  $\vec{a}$ , denumit vectorul accelerație al punctului  $M$ . Spre deosebire de vectorul viteză, după cum vom vedea mai departe în cazul cîtorva mișcări particulare, vectorul accelerație nu mai este situat pe tangenta la traiectorie în  $M$  (fig. 6.4).

Modulul vectorului accelerație are valoarea :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (6.11)$$

Unghiurile făcute de vectorul accelerație cu  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sînt date de relațiile :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_x}{a}, \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{a}, \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

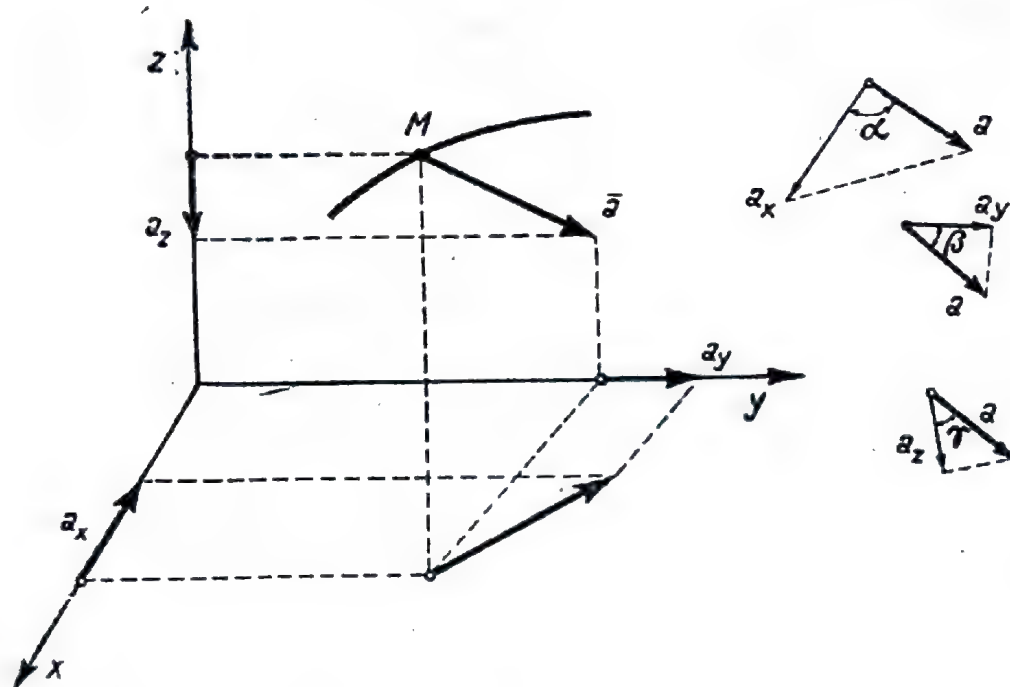


Fig. 6.4.

Cu ajutorul acestor formule vom putea determina complet vectorul accelerație ca mărime, direcție, sens.

b) **Mișcarea rectilinie.** Să presupunem că punctul mobil  $M$  al unui organ de mașină execută o mișcare rectilinie, adică descrie drept traiectorie o linie dreaptă. Un asemenea punct poate fi spre exemplu un punct al pistonului unui motor (fig. 6.5).

Dacă alegem această dreaptă ca axă  $Ox$ , două dintre coordonatele punctului  $M$  (coordoanatele  $y$  și  $z$ ) sînt nule, iar coordonata  $x$  este o funcție de timp :

$$x = x(t), \quad y = 0, \quad z = 0. \quad (6.13)$$

În acest caz, punctul mobil  $M$  se confundă cu proiecția sa  $M_x$ ; el are ca traiectorie axa  $Ox$ , deoarece numei în punctele acestei





axe coordonatele  $y$  și  $z$  sînt nule (fig. 6.5). Vectorii viteză și accelerație sînt îndreptați în lungul axei  $Ox$ , în același sens cu aceasta sau în sens contrar. Într-adevăr, din formulele (6.13) se deduce :

$$v_y = v_z = a_y = a_z = 0, \quad (6.14)$$

$$v = v_x = \dot{x}, \quad a = a_x = \ddot{x}. \quad (6.15)$$

Mișcarea rectilinie poate fi de mai multe feluri, după forma funcției  $x = x(t)$ ; astfel putem avea mișcare rectilinie uniformă, mișcare rectilinie uniform variată, mișcare rectilinie oscilatorie armonică etc. Proprietățile acestor mișcări precum și diagramele lor au fost studiate în capitolul V.

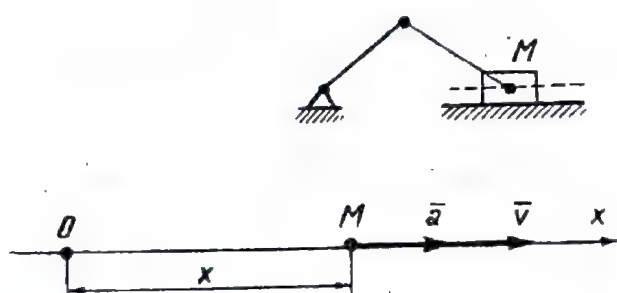


Fig. 6.5.

Mișcarea rectilinie se întâlnește adesea în tehnică; mișcarea diferitelor vehicule pe drumuri rectilinii (automobile, trenuri etc.), mișcarea diferitelor organe de mașini și mașini (masa rabotezei, capul șepingului, suveica unei mașini de cusut, o parte din organele mașinilor textile, pînza unui ferăstrău) constituie numai cîteva exemple de corpuri ale căror puncte de descriu mișcări rectilinii.

Studiul mișcării rectilinii revine la determinarea vitezei, accelerației și a drumului parcurs de către punctul mobil pe traiectoria rectilinie cunoscută.

**Exemplu.** Acul mașinii universale de cusut fețe din industria încălțămintei este acționat de mecanismul bielă-manivelă arătat în figura 6.6. Dacă se împarte cercul manivelei  $OA$

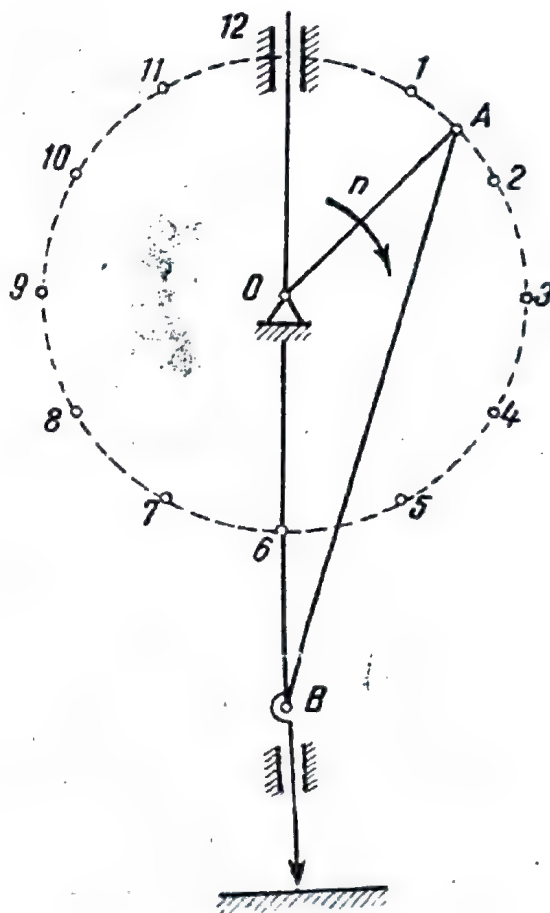


Fig. 6.6.

în 12 părți egale, viteza acului în momentul în care butonul de manivelă  $A$  ajunge într-una din pozițiile 1, 2,..., 12 este dată în tabela 6.2.

Tabela 6.2

Valorile vitezei acului

Poziția butonului $A$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Viteza acului m/s	2,72	4,20	3,93	2,84	1,40	0	1,40	2,84	3,93	4,20	2,72	0

Ținând seama că turația manivelei  $OA$  este  $n = 2\ 000$  rot/min, se cere să se reprezinte diagrama de variație a vitezei acului ca funcție de unghiul  $\varphi$  de rotație al manivelei și ca funcție de timp.

#### Rezolvare

Deoarece între două poziții ale butonului de manivelă există un interval de  $30^\circ$ , vom împărți axa absciselor în 12 părți egale,

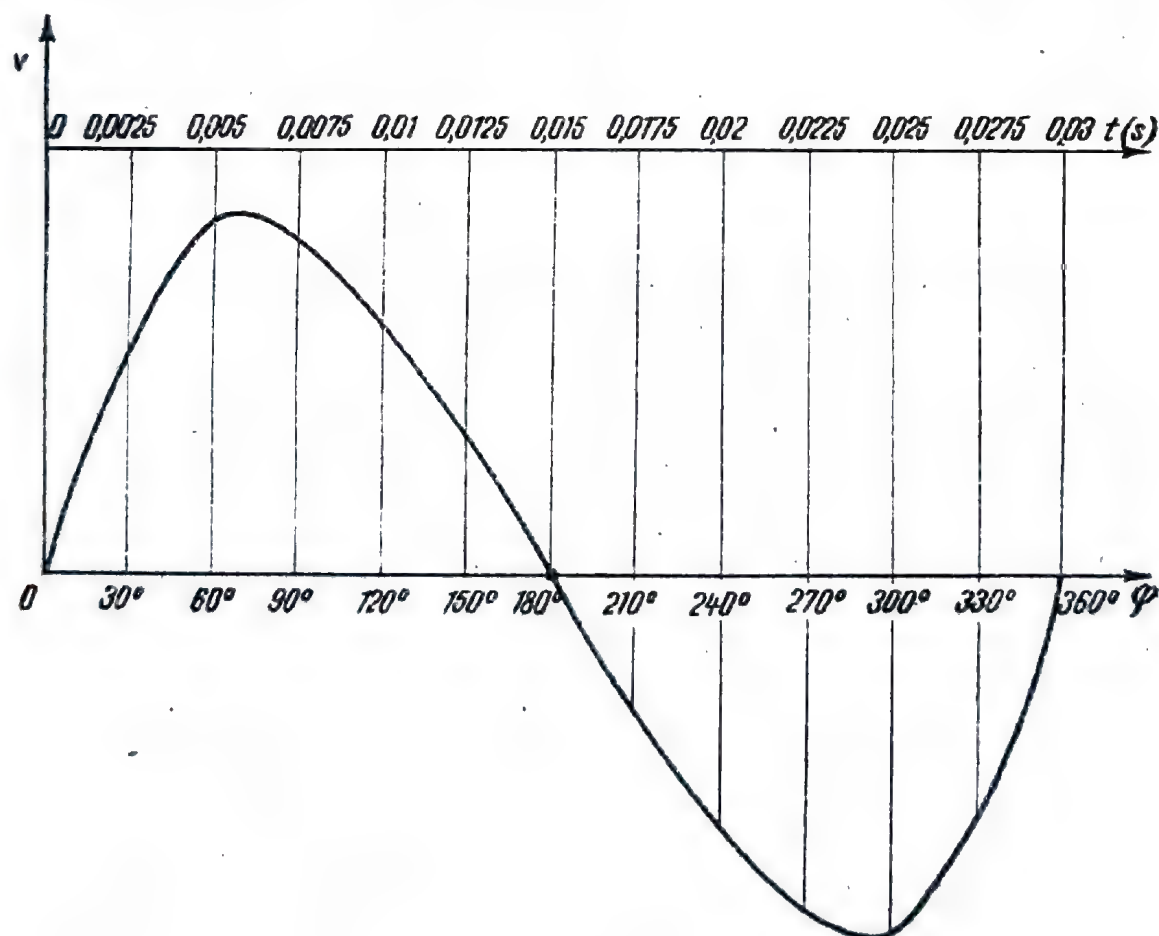


Fig. 6.7.

fiecare reprezentînd  $30^\circ$ ; pe ordonatele ridicate în dreptul acestor diviziuni măsurăm la o scară anumită valorile vitezelor acului din tabela dată. Vitezele acului le vom considera pozitive pentru cursa de ducere (în jos) și negative pentru cursa de întoarcere; diagrama astfel alcătuită este arătată în figura 6.7.

Pentru a reprezenta diagrama vitezei acului ca funcție de timp, observăm că, datorită faptului că manivela  $OA$  se rotește cu viteză unghiulară constantă, diviziunile de pe abscisă nu se vor modifica ci vor căpăta alte valori. Va trebui să căutăm ce interval de timp corespunde străbaterii de către manivela  $OA$  a unghiului dintre două poziții consecutive ( $30^\circ$ ); pentru aceasta, raționăm astfel:

— manivela  $OA$  efectuează o rotație completă ( $360^\circ$ ) în timpul

$$t_1 = \frac{1}{2000} \text{ minute} = \frac{60}{2000} \text{ secunde};$$

— manivela  $OA$  va efectua a 2-a parte dintr-o rotație ( $30^\circ = \frac{360}{12}$ ) în timpul

$$t_2 = \frac{60}{2000 \times 12} \text{ secunde} = \frac{1}{400} \text{ secunde} = 0,0025 \text{ s.}$$

Diviziunile abscisei, în unități de timp, sînt arătate în partea superioară a diagramei din figura 6.7.

c) **Mișcarea circulară.** Să presupunem că un punct  $M$  al unui mecanism se mișcă pe un cerc. Un asemenea punct poate fi de exemplu un punct al unei roți de curea sau al manivelei unui motor (fig. 6.8). Dacă alegem un sistem de axe  $xOy$  avînd originea  $O$  în centrul cercului, coordonata  $z$  a punctului mobil este nulă, iar celelalte două coordonate au valorile:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta, \\ y &= R \sin \theta, \end{aligned} \quad (6.16)$$

în care  $R$  este raza cercului, iar  $\theta$  unghiul format de raza  $OM$  cu axa  $Ox$ ; el este funcție de timp.

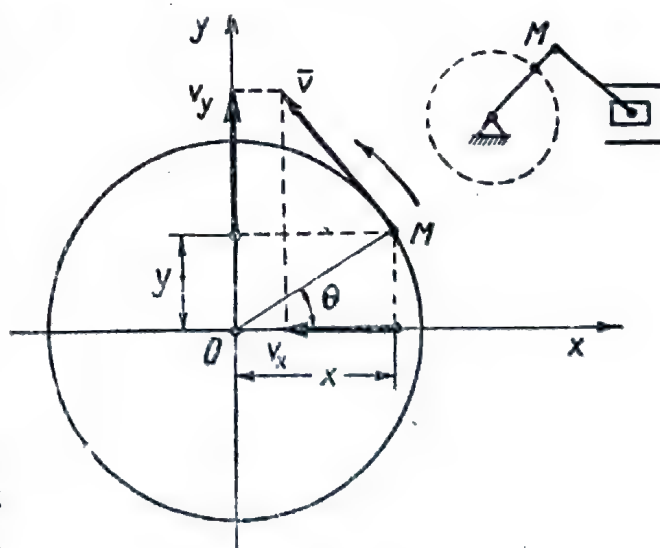


Fig. 6.8.



Funcția  $\theta = \theta(t)$  poate avea diferite forme; deocamdată nu ne vom preocupa de ea, ci remarcăm doar faptul că dacă traiectoria circulară a punctului mobil  $M$  este cunoscută, unghiul  $\theta$  poate determina singur poziția punctului  $M$  pe traiectorie; aceasta revine la a spune că în aceste condiții punctul  $M$  are un singur grad de libertate. Deoarece parametrul  $\theta$  reprezintă un unghi, derivatele sale le vom numi respectiv *viteză unghiulară* ( $\dot{\theta}$ ) și *acclerație unghiulară* ( $\ddot{\theta}$ ) și le vom nota astfel:

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \ddot{\theta} = \varepsilon.$$

Viteza unghiulară  $\omega$  reprezintă unghiul parcurs de raza  $OM$  în unitatea de timp, iar accelerația unghiulară  $\varepsilon$  reprezintă variația vitezei unghiulare  $\omega$  în unitatea de timp.

Să calculăm viteza și accelerația punctului mobil; după cum am arătat mai sus, proiecțiile vitezei pe axe se află derivând coordonatele punctului mobil în raport cu timpul:

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= -R \sin \theta, & \dot{\theta} &= -R\omega \sin \theta, \\ v_y = \dot{y} &= R \cos \theta, & \ddot{\theta} &= R\omega \cos \theta, \\ v_z &= \dot{z} = 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Modulul vitezei este:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{R^2\omega^2 \sin^2 \theta + R^2\omega^2 \cos^2 \theta} = R\omega. \quad (6.18)$$

Pentru aflarea accelerației mai derivăm o dată componentele vitezei; avem:

$$\begin{aligned} a_x &= -R\omega_2 \cos \theta - R\varepsilon \sin \theta, \\ a_y &= -R\omega_2 \sin \theta + R\varepsilon \cos \theta, \\ a_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Modulul accelerației este:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(R^2\omega^2 \cos \theta + R\varepsilon \sin \theta)^2 + (R\varepsilon \cos \theta - R\omega^2 \sin \theta)^2} = \\ &= R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

În tehnică prezintă interes și componentele accelerației punctului  $M$  pe tangentă și normala la traiectoria punctului.

Pentru a le determina, vom proiecta accelerația punctului  $M$  pe raza  $OM$  și pe tangenta  $Mt$  la cerc în punctul  $M$ . Dacă observăm că proiecția accelerației punctului  $M$  pe tangenta  $Mt'$

și pe raza  $OM$  este egală cu suma proiecțiilor celor două componente  $a_x$  și  $a_y$  pe aceste axe, rezultă că avem (fig. 6.9) :

$$\begin{aligned} a_n &= a_x \cos \theta + a_y \sin \theta, \\ a_t &= a_y \cos \theta - a_x \sin \theta, \end{aligned} \quad (6.21)$$

Introducând în aceste formule valorile lui  $a_x$  și  $a_y$  date de formulele (6.19) și efectuând toate calculele se obține :

$$\begin{aligned} a_n &= -R \omega^2, \\ a_t &= R \varepsilon. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Semnul minus din expresia accelerației  $a_n$  ne arată că ea este îndreptată totdeauna de la  $M$  către  $O$ ; accelerația  $a_t$  este îndreptată ca în figura (6.10) dacă  $\ddot{\theta}$  este pozitiv, sau în sens contrar dacă  $\ddot{\theta}$  este negativ.

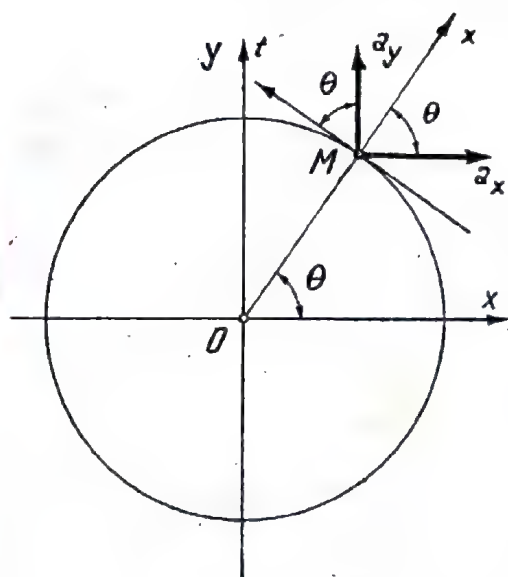


Fig. 6.9.

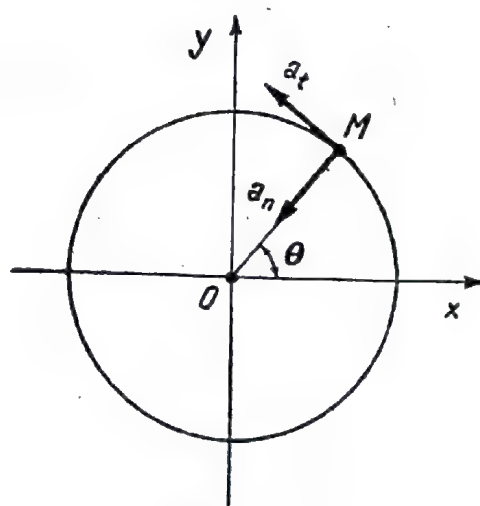


Fig. 6.10.

Dacă vom desena vectorii accelerației așa cum se arată în figura 6.10, vom putea scrie neținînd seama de semn :

$$\begin{aligned} a_n &= R \omega^2, \\ a_t &= R \varepsilon. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Pînă acum nu ne-am preocupat de forma funcției  $\theta = \theta(t)$ , adică de felul în care se mișcă raza  $OM$ ; vom considera în cele ce urmează trei cazuri, și anume :

- cazul cînd unghiul  $\theta$  variază proporțional cu timpul; punctul  $M$  efectuează o mișcare uniformă pe cerc în același sens;
- cazul cînd unghiul  $\theta$  variază proporțional cu pătratul timpului; punctul  $M$  se mișcă pe cerc din ce în ce mai repede

sau din ce în ce mai încet (uniform accelerat sau uniform întârziat);

— cazul când unghiul  $\theta$  variază periodic; punctul  $M$  are o mișcare de du-te-vino pe un arc de cerc.

**Cazul I.** Funcția  $\theta(t)$ , care reprezintă unghiul razei  $OM$  cu axa  $Ox$ , este o funcție liniară de timp; mișcarea punctului  $M$  se petrece astfel încât raza  $OM$  se rotește uniform cu viteza unghiulară constantă  $\omega$  pornind din poziția inițială  $\theta = \theta_0$ . Punctele manivelei unor motor cu ardere internă, punctele camelor de acționare a mecanismelor din industria textilă, a încălțăminteii, punctele centrifugelor utilizate în industria chimică, punctele situate pe brațele macaralelor turnante care transportă material dintr-un loc într-altul în construcții execută, în perioada de regim, mișcări circulare uniforme. În acest caz, viteza unghiulară  $\omega = \dot{\theta}$  este constantă și accelerația unghiulară  $\varepsilon = \ddot{\theta}$  este zero.

Înlocuind în relațiile (6.18) și (6.23) găsim:

$$v = R \omega, \quad (6.24)$$

$$a_n = R \omega^2; \quad a_t = 0. \quad (6.25)$$

În mișcarea circulară uniformă, vom înțelege prin turație numărul  $n$  de rotații complete efectuate pe minut. Între turație și viteza unghiulară există relația:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (6.26)$$

**Cazul II.** Funcția  $\theta(t)$  care reprezintă unghiul razei  $OM$  cu axa  $Ox$  este o funcție de gradul al doilea de timp; mișcarea punctului  $M$  se petrece astfel încât raza  $OM$  se rotește din ce în ce mai repede sau din ce în ce mai încet cu accelerația unghiulară constantă  $\varepsilon$ , pornind din poziția inițială  $\theta = \theta_0$  cu viteza unghiulară inițială  $\dot{\theta} = \omega_0$ . Ca exemple de puncte care execută mișcări circulare uniforme variate pot servi aceleași ca la cazul precedent, în perioada de demaraj sau de oprire.

În acest caz, viteza unghiulară  $\omega$  variază proporțional cu timpul și accelerația unghiulară  $\varepsilon$  este constantă:

$$\begin{aligned} \omega &= \varepsilon t + \omega_0 \\ \varepsilon &= \text{constant}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

cu care:

$$v = R(\varepsilon t + \omega_0), \quad a_n = R(\varepsilon t + \omega_0)^2, \quad a_t = R \varepsilon. \quad (6.28)$$



*Cazul III.* Funcția  $\theta(t)$  care reprezintă unghiul razei  $OM$  cu axa  $Ox$  este o funcție periodică de timp; mișcarea punctului  $M$  se petrece astfel încât raza  $OM$  execută o mișcare de du-te-vino pe cerc cu o amplitudine  $A$  mai mică, egală, sau mai mare decât aceea a unui cerc întreg. Asemenea mișcări descriu punctele corpurilor aflate în mișcare de rotație alternativă. Ca exemplu poate servi mișcarea punctelor de pe una dintre manivelele mecanismului de avans al ramei din industria încălțăminte, a punctelor de pe o roată dintață în timpul șlefuirii lor la o mașină cu pietre înclinate sau a punctelor de pe manivelele și culisele oscilante ale instalațiilor din industria textilă.

Înlocuind expresiile lui  $\theta$  și ale derivatelor sale în relațiile (6.18) și (6.23) găsim :

$$\begin{aligned}\theta &= A \sin (kt + \varphi), \\ \omega &= Ak \cos (kt + \varphi), \\ \varepsilon &= -Ak^2 \sin (kt + \varphi),\end{aligned}\tag{6.29}$$

cu care :

$$\begin{aligned}v &= RkA \cos (kt + \varphi), \\ a_n &= RA^2k^2 \cos^2 (kt + \varphi) \\ a_t &= RAk^2 \sin (kt + \varphi).\end{aligned}\tag{6.30}$$

În acest caz, atât viteza unghiulară  $\omega$  cât și accelerația unghiulară  $\varepsilon$  variază periodic.

**Observație.** Vitezei unghiulare  $\omega = \dot{\theta}$  și accelerației unghiulare  $\varepsilon = \ddot{\theta}$  din mișcarea circulară li se pot da reprezentări vectoriale importante pentru studiul acestei mișcări. Astfel, viteza unghiulară  $\omega = \dot{\theta}$  poate fi considerată ca vector alunecător cu direcția perpendiculară pe planul cercului, cu originea  $O$  aleasă după voie pe această direcție, cu sensul astfel ales încât rotirea pe cerc a mobilului să se facă de la dreapta spre stînga și avînd mărimea  $\omega = \dot{\theta}$  (fig. 6.11). Vectroul  $\varepsilon$  exprimă variația în timp a vectorului  $\bar{\omega}$  (derivata vectorului  $\bar{\omega}$ ) și este situat pe aceeași direcție, deoarece vectorul  $\bar{\omega}$  păstrează direcția constantă putîndu-i varia numai mărimea; vectorii  $\bar{\omega}$  și  $\bar{\varepsilon}$  au același sens dacă mișcarea este accelerată (fig. 6.12) și sensuri contrare dacă mișcarea este întîrziată.

Această reprezentare oferă posibilitatea ca viteza  $\bar{v}$  și accelerația tangențială  $\bar{a}_t$  a unui punct al solidului să poată fi considerate drept momentele vectorilor  $\bar{\omega}$  și  $\bar{\varepsilon}$  în raport cu punctul respectiv.

Într-adevăr, vectorul  $\vec{v}$  are toate caracteristicile vectorului moment din cazul forței :

- direcție perpendiculară pe planul format de punctul  $M$  și vectorul viteză unghiulară  $\vec{\omega}$ ;
- modul  $\propto d$  ( $d$  fiind distanța de la punctul mobil la suportul lui  $\vec{a}$ ) ;
- sensul același ca în cazul momentului unei forțe ;

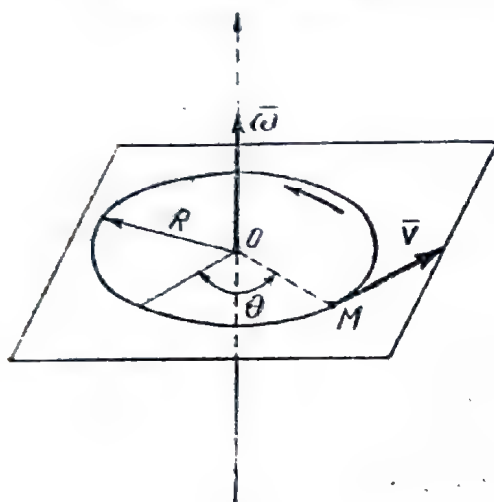


Fig. 6.11.

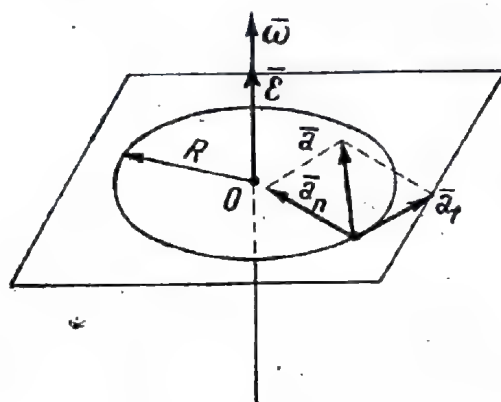


Fig. 6.12.

— punctul de aplicație în punctul mobil (punctul față de care se ia momentul).

d) **Mișcarea uniformă pe elice.** Să presupunem că punctul mobil  $M$  este un cursor care se deplasează pe o bară verticală sudată la rîndul său de un alt cursor  $M_1$ , care descrie o mișcare circulară în planul orizontal  $xOy$  (fig. 6.13).

Dacă cursorul  $M$  nu s-ar deplasa pe bara verticală, el ar descrie o mișcare circulară. Din cauza deplasării pe această bară, el descrie însă o elice trasată pe cilindrul circular ce are drept axă de simetrie axa  $Oz$ .

Dacă el se mișcă uniform pe bara verticală în timp ce cursorul  $M_1$  se mișcă și el uniform pe cercul din planul  $xOy$ , coordonatele sale  $x$  și  $y$  vor fi aceleași ca ale punctului  $M_1$  (mișcare circulară uniformă), iar coordonata  $z$ , în loc să fie nulă, va avea aceeași expresie ca în cazul mișcării rectilinii și uniforme :

$$\begin{aligned} x &= R \cos \omega t, \\ y &= R \sin \omega t, \\ z &= kt, \end{aligned} \tag{6.31}$$

unde am notat prin  $k$  viteza de deplasare a cursorului  $M$  pe bara verticală.

Rezultă că punctul  $M$  descrie o elice pe cilindrul circular drept, avînd drept axă axa  $Oz$ ; după cum am văzut, mișcarea aceasta este o combinație formată dintr-o mișcare circulară uniformă și o mișcare rectilinie uniformă.

Să presupunem că în timpul în care proiecția punctului mobil pe planul  $xOy$  parcurge o singură dată cercul din acest

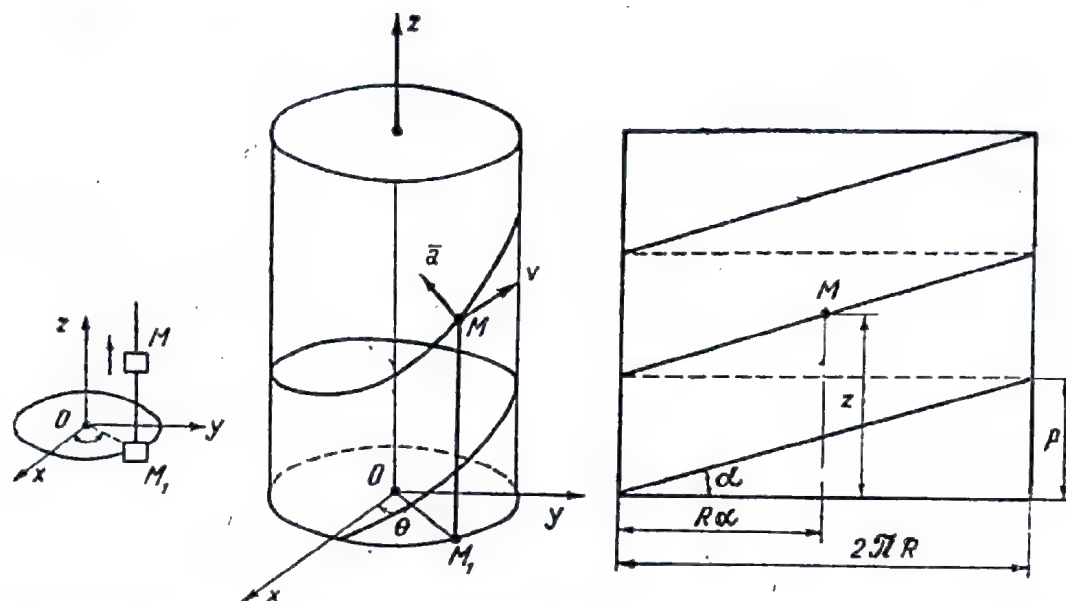


Fig. 6.13.

plan, punctul înaintează pe verticală cu cantitatea  $p$ , denumită *pasul elicei*. Viteza de rotire a razei  $OM_1$  este  $\omega$  (fig. 6.13); mișcarea fiind uniformă ( $\theta = \omega t$ ), vom găsi timpul  $T$  necesar parcurgerii o dată a cercului de bază al cilindrului din relația:

$$t = \frac{\theta}{\omega}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (6.32)$$

În acest timp, punctul mobil urcă pe generatoarea cilindrului cu distanța  $p$ ; înlocuind în ultima ecuație  $z = p$  și  $t = T$ , obținem:

$$p = k \frac{2\pi}{\omega}, \quad (6.33)$$

de unde rezultă valoarea vitezei constante  $k$ :

$$k = \frac{p\omega}{2\pi}. \quad (6.34)$$

Dacă vom desfășura cilindrul pe care se mișcă punctul, vom obține un dreptunghi pe care sînt trasate mai multe drepte, în-



clinate față de cele două baze cu un același unghi  $\alpha$ ; distanța între aceste drepte măsurată pe generatoare este  $\phi$ . Din figura 6.13 rezultă :

$$\phi = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha, \quad (6.35)$$

cu care :

$$k = R\omega \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.36)$$

Componentele vitezei și accelerației pe axele sistemului de referință  $Oxyz$  sînt aceleași ca la mișcarea circulară uniformă (pentru  $v_x$  și  $v_y$ ), sau aceeași ca la mișcarea rectilinie uniformă (pentru  $v_z$ ) :

$$\begin{aligned} v_x &= -R\omega \sin \omega t, \\ v_y &= R\omega \cos \omega t, \\ v_z &= \frac{p\omega}{2\pi} = R\omega \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$v = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 R^2 + p^2} = R\omega \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{R\omega}{\cos \alpha}, \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} a_x &= -R\omega^2 \cos \omega t, \\ a_y &= -R\omega^2 \sin \omega t, \\ a_z &= 0, \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$a = R\omega^2. \quad (6.40)$$

Componentele accelerației pe tangenta și normala la traiectorie sînt :

$$a_n = R\omega^2, \quad a_t = 0. \quad (6.41)$$

## 2. Cinematica solidului rigid

Studiul mișcării solidului rigid prezintă o importanță deosebită pentru tehnică, deoarece cea mai mare parte a organelor mobile ale diferitelor mașini și instalații pot fi considerate solide rigide; cunoașterea modului în care se determină mișcarea unui solid rigid este importantă atît pentru exploatarea mașinilor și instalațiilor care au în componența lor organe mobile, cît și pentru proiectarea de noi mașini care să funcționeze cu viteze din ce în ce mai mari, dînd o producție și o productivitate sporită față de mașinile mai vechi care funcționează în

general cu viteze mai reduse. Astfel, este cunoscută importanța măririi vitezei de lucru a mașinilor din industria textilă; trebuie observat însă că acest fapt este imposibil de realizat fără o cunoaștere temeinică în primul rând a cinematicii mașinii respective, fapt care implică în mod necesar cunoștințe de cinematica solidului rigid.

Mișcarea unui solid rigid este în general mult mai complicată decât aceea a unui punct material; astfel, dacă ne închipuim din punct de vedere geometric că solidul rigid este alcătuit dintr-o infinitate de puncte materiale, observăm imediat că trebuie să studiem simultan mișcarea tuturor acestor puncte. Mișcările pe care le execută aceste puncte sînt foarte diferite între ele; astfel, cele două extremități ale unei biele aparținînd unui mecanism bielă-manivelă execută una o mișcare circulară (butonul de manivelă), iar cealaltă o mișcare rectilinie (bolțul pistonului), în timp ce restul punctelor bielei execută mișcări pe niște curbe închise, avînd forme destul de complicate. Unele puncte au viteze și accelerații mai mari sau mai mici decât altele. Se poate întîmpla chiar ca o parte din punctele unui solid să se afle în repaus, fără ca întreg solidul să fie în repaus; astfel, punctele de pe axa unui cilindru aflat în mișcare de rotație vor rămîne mereu fixe, oricît de repede s-ar roti cilindrul.

Aceste cîteva observații scot în evidență complexitatea problemei cinematicii solidului rigid în raport cu cea a punctului material.

Dacă am generaliza definiția privind determinarea mișcării punctului material, ar trebui să spunem că *vom considera determinată mișcarea unui solid rigid atunci cînd vom cunoaște mișcarea fiecărui punct al său (traietoria, viteza și accelerația)*. Această formulare a determinării mișcării solidului rigid este însă imposibil de aplicat în probleme practice; de aceea o vom înlocui cu următoarea: *vom considera determinată mișcarea unui solid rigid atunci cînd vom cunoaște mișcarea unui punct oarecare (traietorie, viteză, accelerație) aparținînd solidului considerat*. După aceleași reguli după care s-a determinat mișcarea unui punct oarecare se poate determina și mișcarea oricărui alt punct al solidului.

În cele ce urmează, preocuparea cea mai importantă va consta în determinarea ultimelor două caracteristici ale mișcării „punctului oarecare” al solidului considerat (viteze și accelerații), precum și a mărimilor cinematice de care depind acestea; problema determinării traectoriei se va trata numai la aplicații.



Un rol deosebit de important în studiul cinamaticii solidului rigid îl formează așa-numita *distribuție de viteze și accelerații*, care reprezintă totalitatea vectorilor viteze și accelerație ai punctelor solidului, la un moment dat, aplicați în punctele respective.

a) **Determinarea poziției unui solid rigid.** Am arătat în capitolul I că poziția oricărui corp în spațiu față de un sistem de referință fix (adică față de un alt corp considerat fix, pe care îl considerăm ca un sistem de referință fix  $Oxyz$ ) poate fi determinată cu ajutorul unor mărimi geometrice (unghiuri sau distanțe), în timp ce poziția unui punct față de un sistem de referință se determină cu ajutorul a trei numere, coordonatele sale  $x$ ,  $y$  și  $z$ . Atât mărimile geometrice care determină poziția unui corp mobil cât și coordonatele unui punct mobil sînt funcții de timp.

Să fixăm acum un sistem de referință și pe corpul aflat în mișcare; acest sistem se va mișca o dată cu corpul mobil. Un punct al corpului mobil va avea două feluri de coordonate, unele față de sistemul de referință fix, care sînt funcții de timp deoarece față de acest sistem punctul considerat este mobil, și altele față de sistemul de referință, care se mișcă o dată cu corpul mobil. Aceste coordonate nu mai sînt însă funcții de timp, ci sînt niște numere constante, deoarece punctul considerat se mișcă o dată cu corpul și deci o dată cu sistemul de referință fixat pe corpul mobil (fig. 6.14).

Astfel, dacă la mecanismul bielă-manivelă al unui motor vom alege drept corp mobil pistonul și drept punct mobil un punct de pe piston și vom lua drept sistem de referință fix batiul motorului și drept sistem de referință mobil pistonul, orice punct de pe piston va avea două feluri de coordonate: unele funcții de timp față de batiu (sistemul fix) și altele constante față de piston (sistemul mobil legat de piston).

b) **Mișcarea de translație.** Mișcarea de translație este una dintre mișcările simple ale solidului rigid. *Vom spune că un solid rigid are o mișcare de translație dacă un segment oarecare de pe solid rămîne în tot timpul mișcării paralel cu el însuși.* Asemenea mișcări au culisele mecanismelor, sania unui strung, sertarul unei mese etc.

**Grade de libertate. Coordonatele unui punct.** Un solid rigid liber aflat în mișcare de translație în spațiu are trei grade de libertate; în adevăr, deoarece un segment  $AB$  oarecare al solidului trebuie să rămînă paralel cu el însuși în tot timpul mișcării, rezultă că întreg corpul trebuie să rămînă „paralel” cu el însuși în tot timpul mișcării. Aceasta înseamnă că pentru a



determina poziția corpului considerat în spațiu este suficient să cunoaștem poziția numai a unui singur punct al său. După cum am văzut însă, poziția unui punct liber în spațiu poate fi deter-

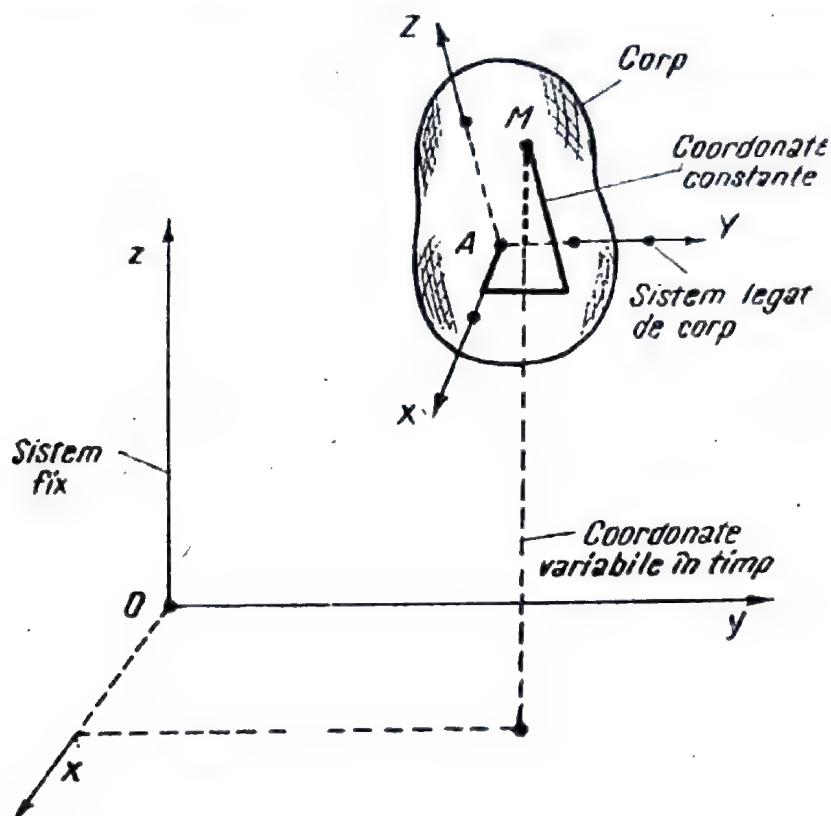


Fig. 6.14.

minată prin trei mărimi geometrice: coordonatele sale față de un sistem fix; aceleași trei mărimi determină și poziția solidului aflat în mișcare de translație.

Un solid aflat în mișcare de translație poate avea însă și numai două sau chiar un singur grad de libertate, în cazul în care nu este liber ci este obligat să rămână în contact cu alte corpuri.

Pentru determinarea coordonatei unui punct al solidului, vom alege două sisteme de axe: unul  $AXYZ$ , legat solidar cu corpul în mișcare, și un alt sistem  $Oxyz$ , fix. Pentru simplificare, axele celor două sisteme vor fi alese paralele între ele. Un punct  $M$  al solidului are coordonatele constante  $X, Y, Z$  față de sistemul  $AXYZ$  și coordonatele variabile  $x, y, z$  față

de sistemul fix  $Oxyz$ . Coordonatele punctului  $A$  față de sistemul  $Oxyz$  sînt  $x_0, y_0, z_0$ . Din figura 6.15 rezultă :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + X, \\ y &= y_0 + Y, \\ z &= z_0 + Z. \end{aligned} \quad (6.42)$$

*Analiza traiectoriilor.* Într-o mișcare de translație, punctele solidului pot descrie curbe oricît de complicate ; ceea ce

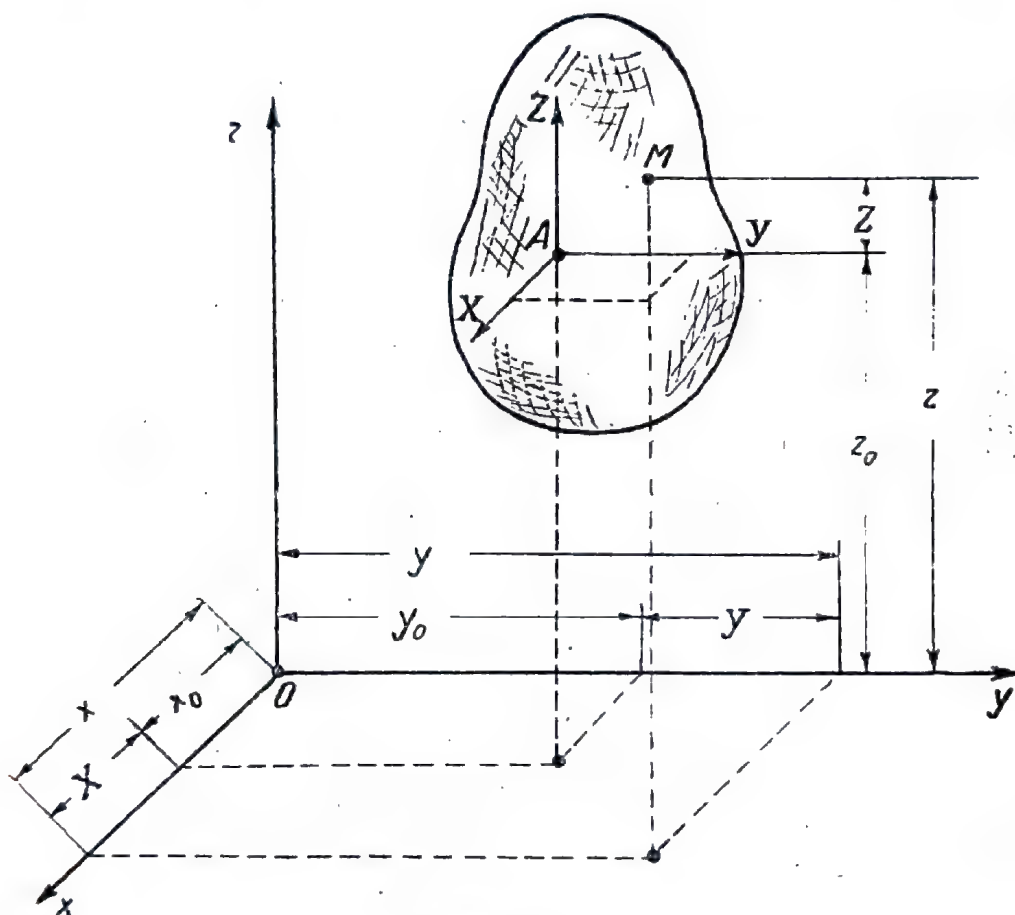


Fig. 6.15.

constituie însă caracteristica de bază a acestei mișcări este faptul că *traiectoriile tuturor punctelor solidului sînt curbe identice, paralele între ele*. Ca exemplu de mișcări de translație ale unui solid rigid cităm :

*Translații rectilinii* (toate punctele solidului descriu linii drepte) : mișcarea sertarului unei mese, mișcarea caroseriei unui vechiul care se deplasează pe un drum rectiliniu, mișcarea cabinei unui ascensor, mișcarea pistonului unui motor în inte-

riorul cilindrului, mișcarea unui manșon care culisează în lungul unui arbore canelat etc. :

*Translații circulare* (toate punctele solidului descriu cercuri de aceeași rază, avînd însă centre diferite) : mișcarea bieiei de cuplare a două roți avînd axele de rotație fixe, mișcarea scaunelor unui scrînciob etc.

*Translații curbilinii oarecare* (toate punctele solidului descriu curbe în spațiu avînd o formă oarecare, paralele între ele) : biela de cuplare a roților de la locomotivă, pedala de acționare a unei biciclete etc.

Translația curbilinie oarecare reprezintă cel mai general caz de translație, întrucît în ea sînt incluse drept cazuri particulare cele două translații menționate mai sus (translație rectilinie și circulară)..

*Analiza vitezelor.* Proiecțiile vitezelor unui punct al solidului pe axele  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$  se obțin prin derivarea coordonatelor punctului  $M$  (6.42) :

$$\begin{aligned} v_x &= v_{ox}, \\ v_y &= v_{oy}, \\ v_z &= v_{oz}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

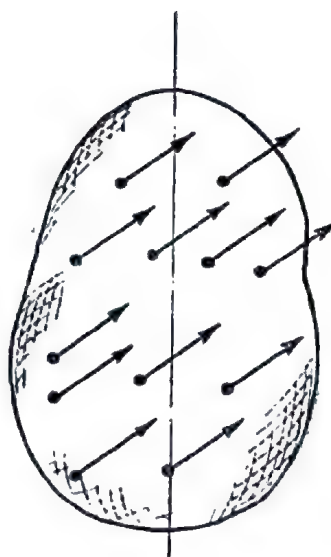


Fig. 6.16.

deoarece coordonatele  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  fiind constante au derivatele nule.

În figura 6.16 este arătată repartitia vitezelor la un moment dat în punctele unui solid aflat în mișcare de translație, iar în figura 6.17 este arătat modul în care variază viteza unui singur punct al solidului pe care îl urmărim în timpul mișcării.

*Analiza accelerațiilor.* Dacă derivăm relațiile (6.43), vom obține proiecțiile accelerației unui punct al corpului pe axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  :

$$\begin{aligned} a_x &= a_{ox}, \\ a_y &= a_{oy}, \\ a_z &= a_{oz}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Trebuie remarcat faptul că accelerațiile punctelor solidului pot varia de la un moment la altul, dar la același moment toate punctele au aceeași accelerație.



În cazul particular al mișcării de translație rectilinie și uniformă a solidului rigid, accelerațiile tuturor punctelor solidului sînt nule.

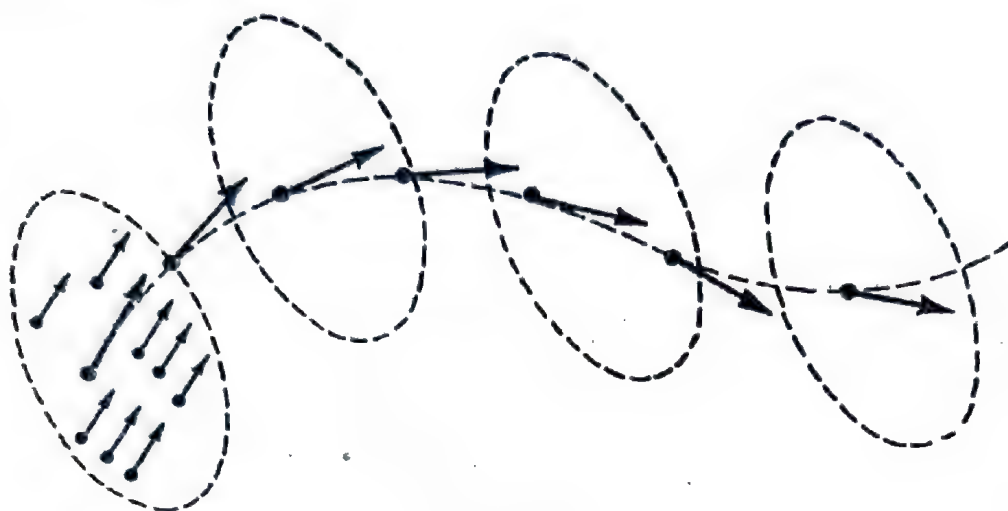


Fig. 6.17.

În figura 6.18 este arătată repartitia accelerațiilor la un moment dat în punctele unui solid rigid aflat în mișcare de translație, iar în figura 6.19 este arătat modul în care variază accelerația unui punct al solidului pe care îl urmărim în timpul mișcării.

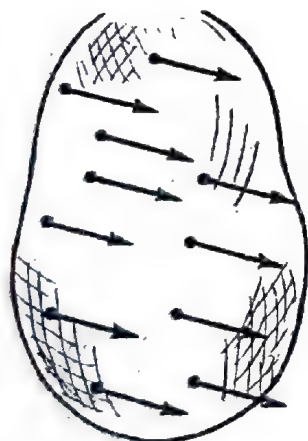


Fig. 6.18.

În concluzie, rezultă că într-o mișcare de translație, mișcarea tuturor punctelor solidului este aceeași cu mișcarea unui singur punct al său.

c) **Mișcarea de rotație.** O altă mișcare simplă a solidului rigid este mișcarea de rotație. Vom spune că un solid rigid are o mișcare de rotație dacă în tot timpul mișcării două puncte ale sale rămîn fixe în spațiu. În acest caz, după cum se poate constata pe cale geometrică, toate punctele rigidului care aparțin dreptei ce unește cele

două puncte fixe rămîn de asemenea fixe; această dreaptă se numește *axa de rotație* a rigidului considerat.

Ca exemple de mișcări de rotație ale unui solid rigid cităm: mișcarea tuturor pieselor care alcătuiesc o mașină sau un mecanism și ale căror axe sînt fixe față de batiul mașinii respective (roți dințate, mandrina păpușii de la strung, scula pre-

lucrătoare de la freză, platforma unui strung carusel), mișcarea acelor unui ceasornic în raport cu cadranul, mișcarea Pământului în jurul axei polilor, dacă nu se ține seama de mișcarea sa în jurul Soarelui etc.

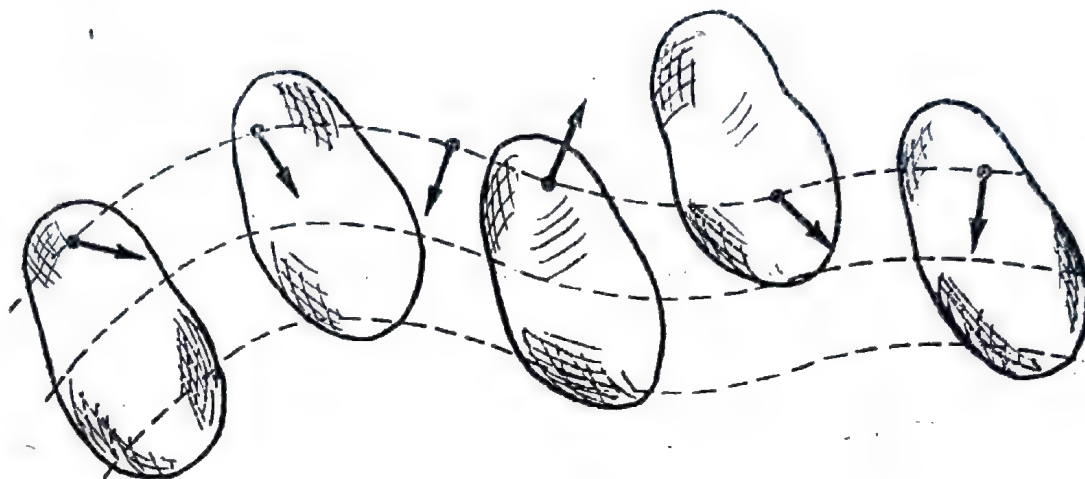


Fig. 6.19.

*Grade de libertate.* Un solid rigid aflat în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe are un singur grad de libertate, deoarece poziția sa la un moment dat poate fi caracterizată printr-o singură mărime geometrică: unghiul diedru pe care-l face un plan fix în spațiu, care trece prin axa de rotație, cu un alt plan solidar cu rigidul considerat și care conține de asemenea axa de rotație. În timpul mișcării solidului, acest unghi este funcție de timp.

*Analiza traiectoriilor.* Pe cale geometrică rezultă că toate punctele unui solid rigid aflat în mișcare de rotație descriu cercuri situate în plane perpendiculare pe axa de rotație și având centre pe această axă, afară de punctele de pe axa de rotație care rămân fixe. Razele cercurilor sînt egale cu depărtările punctelor față de axă; punctele de pe axa de rotație descriu cercuri de raze nule, adică sînt fixe. Cu alte cuvinte, *punctele unui solid rigid aflat în mișcare de rotație descriu mișcări circulare.*

*Analiza vitezelor.* Deoarece toate punctele unui solid aflat în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe descriu mișcări circulare cu aceeași viteză unghiulară  $\omega$  în plane perpendiculare pe axa de rotație, cercurile avînd raze variabile, rezultă că la un moment dat toate punctele solidului au viteza

$$v = R\omega,$$

$R$  fiind raza cercului pe care se mișcă.



De aci putem trage următoarele concluzii în cea ce privește modul în care sînt repartizate vitezele la un moment dat în diferitele puncte ale unui solid rigid aflat în mișcare de rotație :

— vitezele tuturor punctelor solidului sînt perpendiculare pe axa de rotație, deci nu au componente în lungul acestei axe ;

— toate punctele situate în lungul unei drepte  $AB$  paralele cu axa de rotație au aceeași viteză, orientată perpendicular pe această dreaptă ;

— toate punctele situate în lungul unei drepte  $AB$  care întîlnește perpendicular axa de rotație au vitezele perpendiculare pe această dreaptă, mărimile lor variind proporțional cu distanțele punctelor la axa de rotație ;

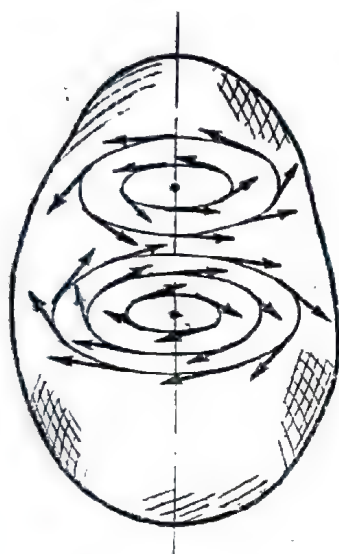


Fig. 6.20.

— singurele puncte care au viteză nulă sînt cele situate pe axa de rotație ; pentru aceste puncte raza  $R = 0$  și deci  $v = 0$ .

În figura 6.20 este arătată repartitia vitezelor la un moment dat în punctele unui solid aflat în mișcare de rotație.

*Diagrama de viteze în mișcarea de rotație.* Viteza unui punct al solidului aflat în mișcare de rotație uniformă se poate exprima în funcție de turația  $n$  și de diametrul  $D$  al cercului descris de punct prin relația :

$$v = \frac{\pi D n}{60} = \frac{\pi n}{60} D = kD, \quad (6.45)$$

unde s-a notat prin  $k$  raportul  $\frac{\pi n}{60}$ .

Această relație poate fi reprezentată într-o diagramă avînd în ordonată viteza  $v$  și în abscisă diametrul  $D$ . Pentru diferite valori ale lui  $k$  diagrama este constituită dintr-o serie de drepte trecînd prin originea  $O$  și înclinate diferit. Asemenea diagrame sînt utilizate în metalurgia prelucrătoare la mașinile-unelte care au turații variabile (de exemplu la freze) ; cu ajutorul lor se poate alege turația sculei în funcție de materialul ce trebuie prelucrat. În figura 6.21 este arătată o asemenea diagramă folosită la freze.



*Analiza accelerațiilor.* Accelerațiile punctelor unui solid aflat în mișcare de rotație se află cu formulele de la mișcarea circulară, în care  $\omega$  este viteza unghiulară a solidului, iar  $\varepsilon$  accelerația sa unghiulară.

Accelerația fiecărui punct al solidului are două componente, una normală și alta tangențială; ele sînt date de formulele:

$$\begin{aligned} a_n &= R \omega^2, \\ a_t &= R \varepsilon. \end{aligned} \quad (6.46)$$

în care  $R$  este raza cercului descris de punctul considerat.

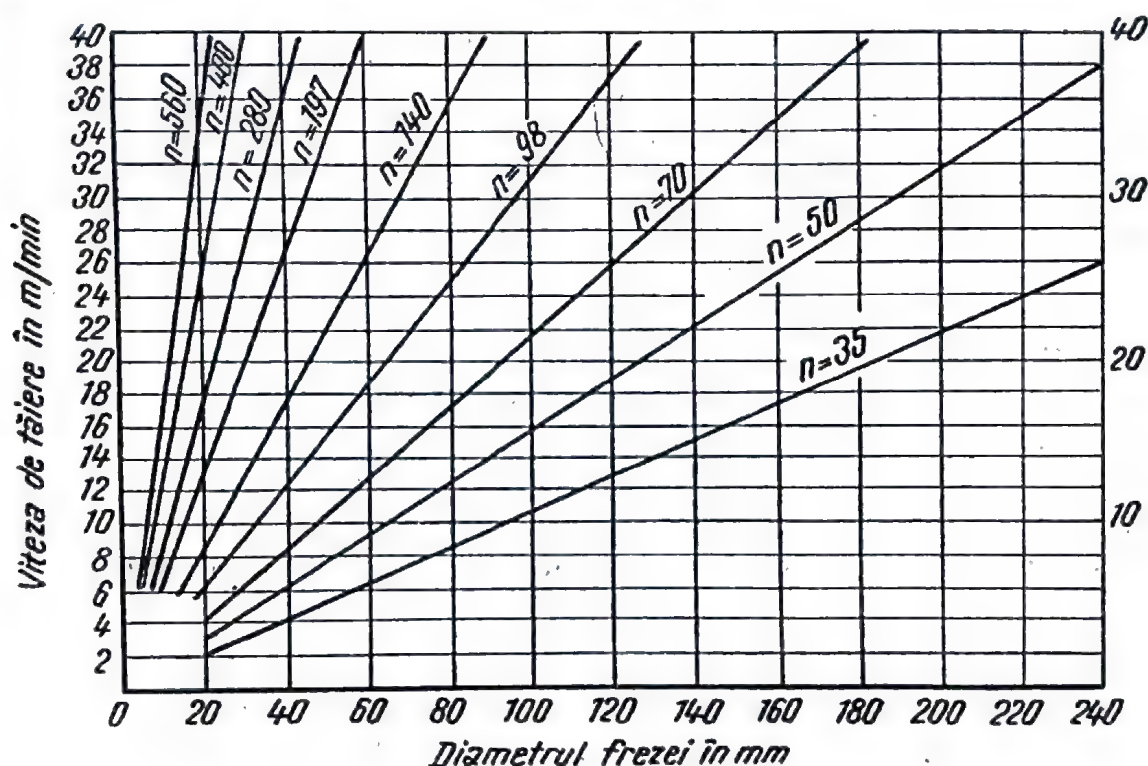


Fig. 6.21.

Accelerația rezultantă are modulul:

$$a = R \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (6.47)$$

și este înclinată față de accelerația normală cu unghiul  $\varphi$  dat de relația

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R \varepsilon}{R \omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (6.48)$$

În figura 6.22 este arătată repartitia accelerațiilor la un moment dat în punctele unui solid aflat în mișcare de rotație.

La un moment dat accelerațiile punctelor solidului aflat în mișcare de rotație sînt repartizate astfel :

— accelerațiile tuturor punctelor solidului sînt perpendiculare pe axa de rotație, deci nu au componente în lungul acestei axe ; în cazul particular al mișcării de rotație uniforme, suporturile accelerațiilor sînt concurente cu axa de rotație ;

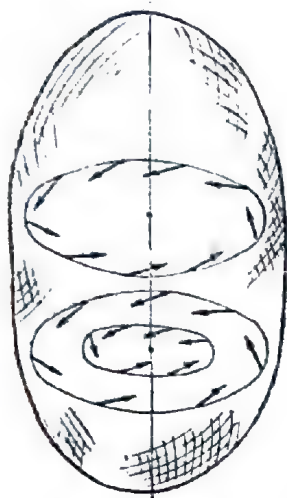


Fig. 6.22.

— toate punctele situate în lungul unei drepte paralele cu axa de rotație au aceeași accelerație, orientată perpendicular pe această dreaptă ;

— toate punctele situate în lungul unei drepte ce întîlnește perpendicular axa de rotație au accelerațiile egal înclinate față de această dreaptă, mărimile lor variînd proporțional cu distanțele punctelor la axa de rotație ;

— singurele puncte de accelerație nulă sînt cele situate pe axa de rotație ; aceste puncte au  $R = 0$  și  $a = 0$ .

**d) Mișcarea elicoidală.** Mișcarea elicoidală constituie un caz mai complex de mișcare a unui solid rigid decît cele studiate pînă acum (translația și rotația). *Vom spune că un solid rigid are o mișcare elicoidală dacă în timpul mișcării el se rotește în jurul unei drepte fixe și alunecă în lungul aceleiași drepte.* Această dreaptă se numește *axa mișcării elicoidale*. Putem spune deci că mișcarea elicoidală este o mișcare compusă dintr-o translație și o rotație.

Ca exemple de mișcări elicoidale ale unui solid rigid cităm : mișcarea unui corp care în timp ce cade pe verticală se rotește în jurul verticalei, mișcarea elicei unui avion în timpul zborului, mișcarea burghiului unei mașini de găurit în timp ce prelucurează o piesă.

În timpul mișcării elicoidale se poate întîmpla ca axa mișcării să rămînă aceeași sau să se schimbe de la un moment dat la altul ; astfel, în timpul mișcării rectilinii a unui avion, axa mișcării elicoidale a elicei rămîne mereu aceeași spre deosebire de cazul în care avionul execută o mișcare curbilinie, cînd această axă se schimbă de la un moment la altul.

Un caz particular de mișcare elicoidală care intervine foarte des în practică este acela al mișcării de șurub. *Vom spune că un solid rigid are o mișcare de șurub dacă el execută o mișcare*



elicoidală pentru care există un raport constant între unghiul de rotire în jurul axei mișcării elicoidale și distanța cu care solidul înaintază în lungul acestei axe. Ca exemplu de mișcare de șurub putem cita mișcarea de înaintare a șurubului într-o piuliță; după câte se știe, în acest caz există un raport constant între unghiul de rotire și distanța de înaintare de-a lungul axei, raport impus de filetul șurubului, în timp ce la mișcarea elicei nu există un asemenea raport constant; înainte de pornire, elicea se rotește fără să înainteze în lungul axei sale; după ce pornește, mișcarea în lungul axei se face din ce în ce mai repede pînă ce ajunge la viteza de înaintare de regim.

Remarcăm că și în cazul mișcării de șurub axa mișcării poate să rămînă fixă sau se poate schimba de la un moment la altul.

*Grade de libertate.* Un solid aflat în mișcare elicoidală astfel încît axa mișcării sale este fixă are două grade de libertate, deoarece poziția sa la un moment dat poate fi caracterizată prin două mărimi geometrice: unghiul de rotire în jurul axei și distanța cu care el înaintază în lungul acestei axe. Aceste două mărimi depind de timp atunci cînd solidul execută mișcarea elicoidală.

*Analiza traiectoriilor.* După cum se poate constata ușor pe cale geometrică, punctele unui solid aflat în mișcare elicoidală, axa mișcării fiind fixă, descriu elici de pas variabil, situate pe un cilindru circular, cu excepția punctelor de pe axă, care descriu această axă. În cazul mișcării de șurub elicele au pasul constant.

*Analiza vitezelor.* Deoarece mișcarea elicoidală a solidului este rezultatul compunerii unei mișcări de translație în lungul axei mișcării elicoidale și a unei mișcări de rotație în jurul aceleiași axe, toate punctele solidului vor avea două viteze:

- o viteză de translație  $v_1$ , aceeași pentru toate punctele, și
- o viteză de rotație  $v_2 = R\omega$ , care se află după regula de aflare a vitezelor din cazul mișcării de rotație. Viteza resultantă

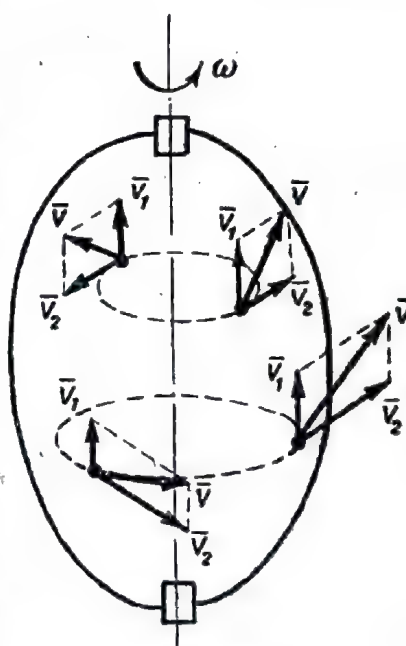


Fig. 6.23.



se obține prin adunarea vectorială a celor două viteze (fig. 6.23); ea are modulul :

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{v_1^2 + R^2 \omega^2}, \quad (6.49)$$

deoarece vitezele  $v_1$  și  $v_2$  sînt perpendiculare între ele în orice punct al solidului.

*Cazul mișcării de șurub uniforme.* Acest caz de mișcare, întâlnit foarte frecvent în tehnică, este caracterizat printr-un raport constant între drumul parcurs de-a lungul axei mișcării și unghiul cu care s-a rotit solidul în timpul parcurgerii acestui drum. În adevăr, dacă șurubul care înaintează într-o piuliță nu ar avea pasul constant, el nu ar putea executa mișcarea.

Dacă vom nota prin  $\mu$  respectiv  $\theta$  distanța de înaintare a solidului și unghiul de rotire în jurul axei mișcării măsurate de la o aceeași origine (pentru  $\mu = 0$ ,  $\theta = 0$ ) pentru mișcarea uniformă de șurub vom avea :

$$\mu = k\theta, \quad (6.50)$$

$k$  fiind o constantă oarecare. Pentru a-i găsi valoarea, să presupunem că solidul s-a rotit cu un unghi  $\theta = 2\pi$ , parcurgînd în lungul axei o distanță pe care o vom denumi pas și o vom nota cu  $p$ ; înlocuind mai sus găsim :

$$p = k2\pi, \quad (6.51)$$

de unde :

$$k = \frac{p}{2\pi} \quad (6.52)$$

și deci :

$$\mu = \frac{p}{2\pi} \theta. \quad (6.53)$$

Prin derivare găsim :

$$\dot{\mu} = v_1 = \frac{p}{2\pi} \dot{\theta} = \frac{p}{2\pi} \omega \quad (6.54)$$

$\omega$  fiind viteza unghiulară de rotație constantă, mișcarea fiind uniformă.

Modulul vitezei unui punct (formula 6.49) devine :

$$v = \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} \omega^2 + R^2 \omega^2} = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{p^2 + 4\pi^2 R^2}. \quad (6.55)$$

**Analiza accelerațiilor.** Accelerația unui punct al unui solid aflat în mișcare elicoidală este de asemenea rezultatul compunerii accelerației din mișcarea de rotație în cea din mișcarea de translație. Ea va avea deci trei componente :

- o componentă normală  $R\omega$  rezultată din mișcarea de rotație;
- o componentă tangențială  $R\epsilon$ , rezultată tot din mișcarea de rotație;
- o componentă  $a_1$  în lungul axei mișcării elicoidale, rezultată din translația în jurul acestei axe.

Accelerația rezultantă se obține prin adunarea vectorială a celor trei accelerații (fig. 6.24); ea este diagonală paralelipipedului avînd drept laturi cele trei accelerații :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_n^2 + a_t^2 + a_1^2} = \\ &= \sqrt{R^2(\omega^4 + \epsilon^2) + a_1^2} \end{aligned} \quad (6.56)$$

În cazul mișcării uniforme de șurub, avem  $a_1 = \epsilon = 0$  și deci :

$$a = R\omega^2, \quad (6.57)$$

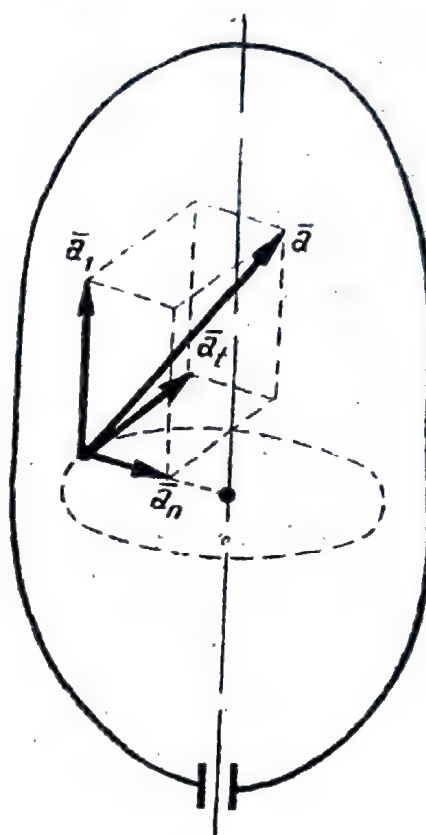


Fig. 6.24.

adică toate punctele solidului au numai accelerația normală din cazul mișcării de rotație.

e) **Mișcarea plan-paralelă.** Să considerăm mișcarea de rostogolire a unui cilindru pe un plan fix. În acest caz de mișcare, ne putem da seama ușor că toate punctele care se află pe o aceeași dreaptă paralelă cu axa cilindrului descriu aceeași mișcare; spre exemplu, punctele axei cilindrului descriu toate linii drepte. Această axă formează osia roții unui vehicul. Dacă vom secționa cilindrul cu plane perpendiculare pe axa sa, vom constata că punctele corespunzătoare din aceste plane situate pe paralele la axa cilindrului descriu aceleași mișcări. Toate aceste secțiuni ale cilindrului rămîn în tot timpul mișcării paralele cu un plan fix, perpendicular pe axa cilindrului. Acest caz de mișcare este denumit *mișcare plan-paralelă*.

Vom spune că un solid rigid execută o mișcare plan-paralelă dacă în tot timpul mișcării sale un plan aparținînd solidului alunecă pe un plan fix din spațiu. Este ușor de văzut că planul



fix din spațiu ni-l putem imagina ca fiind chiar în contact cu planul legat de solid. Față de planul fix, solidul poate executa numai mișcări de translație după orice direcție cuprinsă în acest plan și o mișcare de rotație în raport cu orice axă perpendiculară pe acest plan; el nu poate executa mișcări de translație pe direcții necuprinse în planul fix și nici mișcări de rotație față de axe cuprinse în acest plan. De aci rezultă imediat deosebiri și asemănările dintre mișcarea elicoidală și mișcarea plan-paralelă: atât mișcarea elicoidală cât și mișcarea plan-paralelă pot fi considerate ca fiind compuse dintr-o mișcare de translație și o mișcare de rotație; deosebirea dintre ele constă în aceea că, pe cînd în cazul mișcării elicoidale direcția mișcării de translație coincide cu axa mișcării de rotație, în cazul mișcării plan-paralele direcția mișcării de translație este perpendiculară pe axa mișcării de rotație.

Ca exemple de mișcări plan-paralele ale unui solid rigid cităm: mișcarea roții unui vehicul care se deplasează în translație rectilinie, mișcarea bielei unui mecanism bielă-manivelă, mișcarea unei scări care cade în timp ce se reazemă pe un perete vertical și pe podea, mișcarea unui corp care în timp ce cade pe verticală se rotește în jurul unei axe orizontale etc.

Mișcarea plan-paralelă fiind o mișcare compusă se va reduce, în anumite cazuri particulare, la mișcarea de translație sau la mișcarea de rotație; într-adevăr, orice mișcare de translație rectilinie constituie un caz particular de mișcare plan-paralelă; chiar și translațiile curbilinii la care traiectoriile descrise de punctele solidului sînt curbe plane constituie de asemenea cazuri particulare de mișcări plan-paralele. Mișcarea de rotație a solidului rigid în jurul unei axe fixe constituie de asemenea un caz particular de mișcare plan-paralelă, deoarece orice plan al solidului perpendicular pe axa de rotație rămîne în timpul mișcării acestuia paralel cu un plan fix din spațiu.

Mișcarea plan-paralelă a unui solid rigid prezintă o particularitate care ne ușurează foarte mult studiul; am văzut, în cazul rostogolirii cilindrului, că toate punctele aflate pe o paralelă la axa sa, deci pe o perpendiculară la planul fix cu care rămîn paralele diferitele secțiuni efectuate în cilindru, execută mișcări identice. Această observație ne va permite ca în loc să studiem mișcarea tuturor punctelor solidului să studiem numai mișcarea unei figuri plane (intersecția corpului cu planul fix din spațiu). Pentru a determina mișcarea celorlalte puncte ale solidului, vom duce o serie de perpendiculare pe planul acestei secțiuni; mișcarea punctelor de pe aceste perpendiculare va fi identică cu mișcarea punctelor din planul secțiunii.



*Grade de libertate. Coordonatele unui punct.* Un solid aflat în mișcare plan-paralelă are trei grade de libertate deoarece poziția sa la un moment dat poate fi caracterizată prin trei mărimi geometrice: două distanțe, reprezentând coordonatele unui punct al solidului din planul său care se deplasează rămânând în contact cu planul fix din spațiu, și unghiul dintre o dreaptă a aceluiași plan al solidului și o altă dreaptă cuprinsă în planul fix din spațiu.

Un solid aflat în mișcare plan-paralelă poate avea însă și două sau chiar un singur grad de libertate; într-adevăr, dacă mișcarea de alunecare a planului, invariabil legat solidului, peste planul fix din spațiu este îngăduită prin anumite legături, caracterul mișcării păstrându-se, numărul mărimilor geometrice care-i determină poziția scade la două sau chiar la una singură. Un asemenea exemplu îl constituie mișcarea scării căreia, din cauza obligației ca în timpul mișcării să rămână în contact cu peretele vertical și cu podeaua, i se poate determina poziția numai printr-o singură mărime geometrică: unghiul său cu unul dintre pereți.

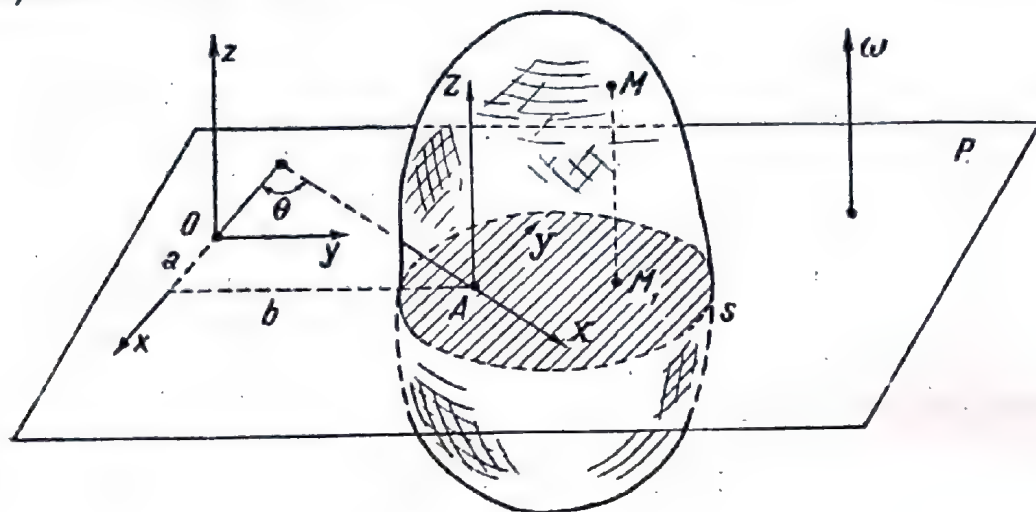
Să raportăm poziția solidului la un sistem fix de axe având drept axă  $Oz$  axa perpendiculară pe planul fix  $P$  din spațiu, peste care alunecă planul invariabil legat solidului, iar drept plan  $xOy$  acest plan fix (fig. 6.25,  $a$ ). Sistemul legat de solid ( $AXYZ$ ) îl vom alege astfel încât axele  $AX$  și  $AY$  să se afle în planul solidului care lunecă peste planul fix, iar axa  $AZ$  perpendiculară pe acest plan. Mărimile geometrice care determină poziția sistemului  $AXYZ$  față de sistemul fix  $Oxyz$  sînt distanțele  $a$  și  $b$  (coordoanatele originii  $A$  a sistemului mobil) și unghiul  $\theta$ . Dacă notăm cu  $X$ ,  $Y$  și  $Z$  coordonatele constante ale punctului  $M$  față de sistemul  $AXYZ$  vom avea (fig. 6.25,  $b$ ):

$$\begin{aligned}x &= a + X \cos \theta - Y \sin \theta, \\y &= b + X \sin \theta + Y \cos \theta, \\z &= Z.\end{aligned}\tag{6.58}$$

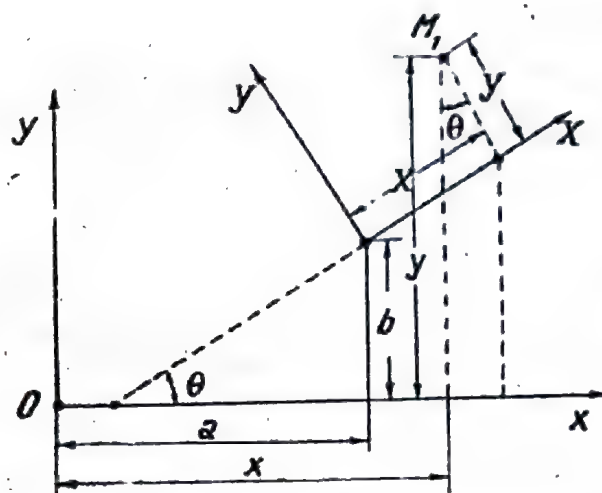
Acestea sînt expresiile coordonatelor unui punct oarecare al solidului ca funcții de gradele de libertate ale acestuia; în aceste expresii mărimile  $X$ ,  $Y$  și  $Z$  sînt constante, iar  $a$ ,  $b$  și  $\theta$  sînt funcții de timp.

*Analiza traiectoriilor.* Pe cale geometrică rezultă că traiectoriile punctelor unui solid aflat în mișcare plan-paralelă sînt curbe plane care pot avea o formă oricît de complicată; planele tuturor

traiectoriilor sînt paralele cu planul fix  $P$  pe care se deplasează secțiunea  $S$  a solidului.



a)



b)

Fig. 6.25.

*Analiza vitezelor.* Proiecțiile vitezei unui punct oarecare al solidului pe axele sistemului fix  $Oxyz$  se află prin derivarea expresiilor (6.58) ale coordonatelor unui punct oarecare aparținând solidului; obținem :

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{a} - X \sin \theta \omega - Y \cos \theta \omega = \dot{a} - (y-b) \omega, \\ v_y &= \dot{b} + X \cos \theta \omega - Y \sin \theta \omega = \dot{b} + (x-a) \omega, \\ v_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Dacă notăm

$$\dot{a} = v_{Ax}, \quad \dot{b} = v_{Ay},$$

deoarece  $\dot{a}$  și  $\dot{b}$  reprezintă proiecțiile vitezei punctului  $A$  pe axele de coordonate, formulele (6.59) se mai scriu :

$$\begin{aligned} v_x &= v_{Ax} - \omega (y - b), \\ v_y &= v_{Ay} + \omega (x - a), \\ v_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Să determinăm acum dacă pe solid există puncte a căror viteză este nulă ; pentru aceasta, vom anula componentele vitezei pe axele sistemului  $Oxyz$  ; avem :

$$\begin{aligned} v_{Ax} - (y - b) \omega &= 0, \\ v_{Ay} + (x - a) \omega &= 0. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Din acest sistem vom deduce coordonatele punctului  $I$  situat în planul secțiunii  $S$  și care are în acest moment viteză nulă ; ele sînt :

$$\begin{aligned} x &= a - \frac{v_{Ay}}{\omega}, \\ y &= b + \frac{v_{Ax}}{\omega}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Dacă ținem seama că :

$$v_{Ay} = \frac{da}{d\theta} \quad \text{și} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt},$$

avem :

$$\frac{v_{Ay}}{\omega} = \frac{\frac{da}{d\theta}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{da}{dt}.$$



Procedînd la fel și pentru cea de-a doua formulă (6.61), adică înlocuind

$$v_{Ax} = \frac{da}{dt} \text{ și } \omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Obținem :

$$\begin{aligned} x &= a - \frac{db}{d\theta} \\ y &= b + \frac{da}{d\theta}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

De aici rezultă faptul că în timpul mișcării plan-paralele a unui solid rigid există o infinitate de puncte dispuse în lungul unei drepte perpendiculare pe planul mișcării, care înțeapă acest plan în punctul  $I(x, y)$  care are viteza nulă ; această dreaptă poartă denumirea de *axă instantanee* a mișcării solidului considerat și joacă un rol foarte important în studiul mișcării acestuia ; punctul  $I$  se numește *centrul instantaneu de rotație*.

Poziția centrului instantaneu se schimbă mereu în timpul mișcării atît față de sistemul fix cît și față de sistemul mobil, descriind în raport cu aceste sisteme două curbe : o curbă denumită *bază*, care reprezintă locul geometric al centrului instantaneu în raport cu sistemul fix, și o altă curbă denumită *rostogolitoare*, care reprezintă locul centrului instantaneu în raport cu sistemul mobil.

O experiență simplă ne arată că o foaie de hîrtie poate fi adusă pe o masă plană dintr-o poziție în alta numai prin rotații de unghiuri mici în jurul a diferite axe perpendiculare pe planul său. Înțepînd cu un ac locul acestor axe vom căpăta urmele centrului instantaneu de rotație pe foaia respectivă și pe masa pe care ea s-a mișcat ; dacă unim între ele aceste urme vom obține două curbe : una situată pe masă (baza) și alta situată pe hîrtie (rostogolitoare).

Se poate arăta că cele două traiectorii ale centrului instantaneu de rotație (baza și rostogolitoarea) sînt tangente între ele în timpul mișcării în centrul instantaneu, rostogolindu-se una pe cealaltă fără alunecare.

Dacă axa perpendiculară pe planul mișcării este fixă pentru un moment, înseamnă că toate punctele solidului vor avea vitezele ca și cum întregul solid s-ar roti, în acel moment, în jurul acestei axe, la fel ca în cazul foi de hîrtie adusă dintr-o poziție într-alta, prin rotații, în jurul unei axe care se schimbă de la un moment la altul.

Viteza unui punct  $A$  din planul mișcării se va afla cu formula de la mișcarea de rotație, centrul de rotație fiind  $I$ :

$$v_A = \omega AI. \quad (6.64)$$

Am mai întâlnit o asemenea distribuție de viteze în cazul mișcării de rotație a solidului rigid. Putem spune deci că *distribuția de viteze într-o mișcare plană este identică cu aceea de la mișcarea de rotație, ca și când rigidul s-ar roti în jurul axei instantanee de rotație*. Trebuie observat că rigidul nu se rotește efectiv în jurul acestei axe deoarece ea se află în mișcare atît față de sistemul fix cît și față de corp, ci distribuția de viteze este aceea *ca și când* solidul s-ar roti în jurul acestei axe (fig. 6.26).

*Determinarea poziției centrului instantaneu de rotație.* Folosind proprietățile mișcării plan-paralele, putem determina poziția centrului instantaneu de rotație în modul următor:

— dacă se cunosc direcțiile vitezelor a două puncte se duc perpendiculare pe aceste direcții în punctele respective; la intersecția lor se află centrul instantaneu (fig. 6.27,  $a$ );

— dacă se cunoaște viteza unui punct și viteza unghiulară a mișcării, se ia pe perpendiculara la această viteză o distanță egală cu raportul dintre viteza punctului și viteza unghiulară; punctul astfel obținut este centrul instantaneu de rotație. În figura 6.27,  $b$  sînt arătate celor două poziții ale centrului instantaneu corespunzătoare sensurilor lui  $\omega$ .

În cazul în care suporturile vitezelor celor două puncte sînt paralele între ele, centrul instantaneu se află la infinit; în acest caz corpul se află în mișcare de translație plană (caz particular al mișcării plan-paralele).

*Analiza accelerațiilor.* Componentele accelerației unui punct oarecare  $M(X,Y)$  al solidului pe axele sistemului fix  $Oxyz$  se

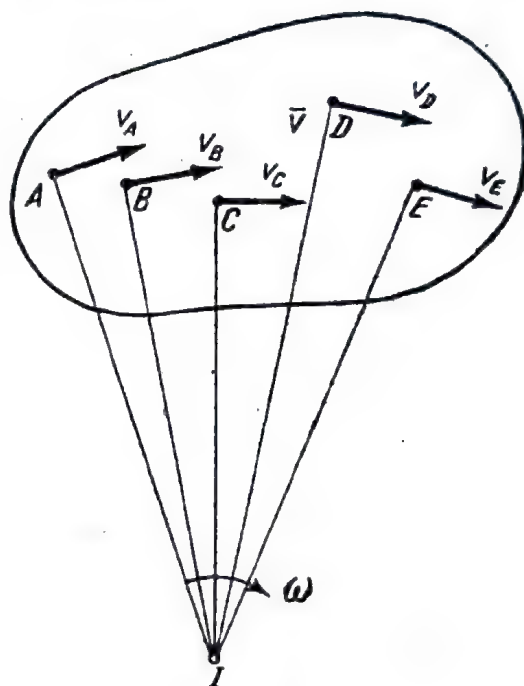


Fig. 6.26.

mai pot afla prin derivarea componentelor vitezei (6.59) pe același sistem de axe; obținem :

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{a} - (X \cos \theta - Y \sin \theta) \omega^2 - (X \sin \theta + Y \cos \theta) \varepsilon, \\ a_y &= \ddot{b} - (X \sin \theta + Y \cos \theta) \omega^2 + (X \cos \theta - Y \sin \theta) \varepsilon, \\ a_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Aceste proiecții mai pot fi scrise și sub forma următoare, dacă se ține seama de formulele (6.58) și de faptul că  $\ddot{a} = a_{Ax}$  și  $\ddot{b} = a_{Ay}$ :

$$\begin{aligned} a_x &= a_{Ax} - \omega^2(x-a) - \varepsilon(y-b), \\ a_y &= a_{Ay} - \omega^2(y-b) + \varepsilon(x-a), \\ a_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.66)$$

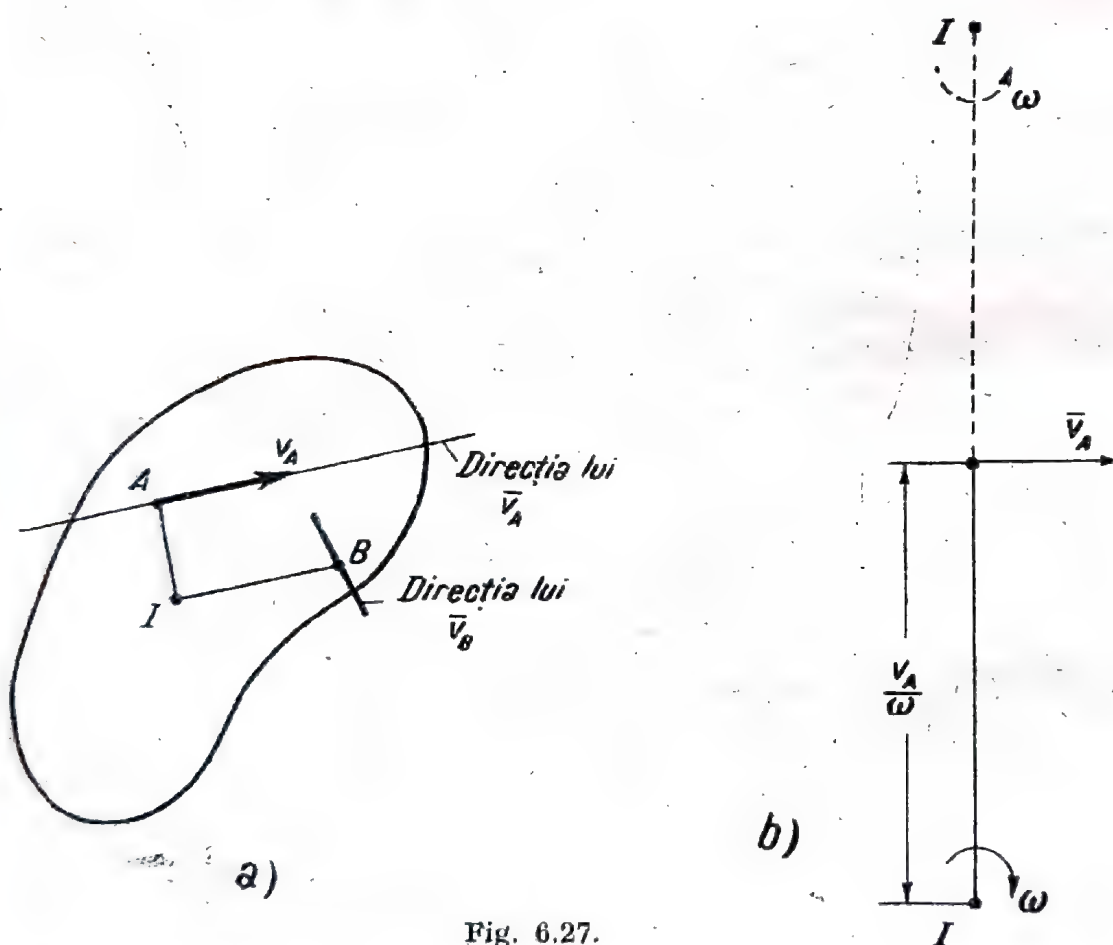


Fig. 6.27.

La fel ca și în cazul vitezei putem determina și aici punctele de accelerație nulă ale solidului; coordonatele acestor puncte se determină anulând pe  $a_x$  și  $a_y$  din expresiile (6.66). Punctul astfel obținut poartă denumirea de *centrul accelerațiilor* și el joacă pentru studiul accelerațiilor același rol pe care-l joacă centrul instantaneu pentru studiul vitezelor.



### 3. Aplicații

a) Una dintre mașinile-unelte realizată de industria noastră constructoare de mașini creată în anii regimului democrat-popular este și șepingul „Înfrățirea” (Oradea). Cursa portcuțitului acestei mașini este de 250 mm, iar portcuțitul efectuează 17,9 curse pe minut, în timp ce masa avansează cu 0,67 mm pe o cursă dublă; se cere viteza medie a portcuțitului și viteza de avans a mesei<sup>1</sup>.

#### Rezolvare

Portcuțitul execută o mișcare de translație rectilinie alternativă, iar masa care poartă piesa execută o mișcare de translație rectilinie uniformă.

Viteza medie a portcuțitului este:

$$v_m = 17,9 \frac{\text{curse duble}}{\text{min}} \times 2 \times 250 \frac{\text{mm}}{\text{cursa dublă}} = 8950 \frac{\text{mm}}{\text{min}} = 8,95 \frac{\text{m}}{\text{min}}.$$

Viteza de avansare a mesei este:

$$v = 0,67 \frac{\text{mm}}{\text{cursa dublă}} \times 17,9 \frac{\text{curse duble}}{\text{min}} = 11,993 \frac{\text{mm}}{\text{min}} \approx 12 \frac{\text{mm}}{\text{min}}.$$

b) Rotorul unei turbine cu abur avînd diametrul  $D = 1$  m se rotește cu turația constantă  $n = 3\,000$  rot/min. Se cere să se determine viteza și accelerația unui punct de la periferia sa.

#### Rezolvare

Aplicînd formulele de la mișcarea de rotație obținem:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \times 3\,000}{30} = 314 \text{ rad/s},$$

$$v = R\omega = 0,5 \times 314 = 157 \text{ m/s},$$

$$a_n = R\omega^2 = 0,5 \times 314^2 = 49\,298 \text{ m/s}^2.$$

c) În figura 6.28 este reprezentată o presă cu fricțiune întrebuințată la ștanțarea a diferite piese în industria grea în industria ușoară, a aparatelor de radio ș.a. Ea este formată din două discuri  $A_1$ ,  $A_2$ , solidare pe arborele  $xy$  ce poate luneca

<sup>1</sup> Se știe că cursa și numărul de curse duble ale portcuțitului, precum și viteza de avans a mesei sînt reglabile; datele din problemă reprezintă una din variante.

în lungul acestei axe în timp ce discurile se rotesc, și un volant  $V$ , solidar cu un șurub trecând printr-o piuliță fixă pe batiul mașinii care pune în mișcare poansonul  $P$ , ștanșând piese pe nicovala  $N$  solidară cu batiul mașinii. Distanța dintre cele două

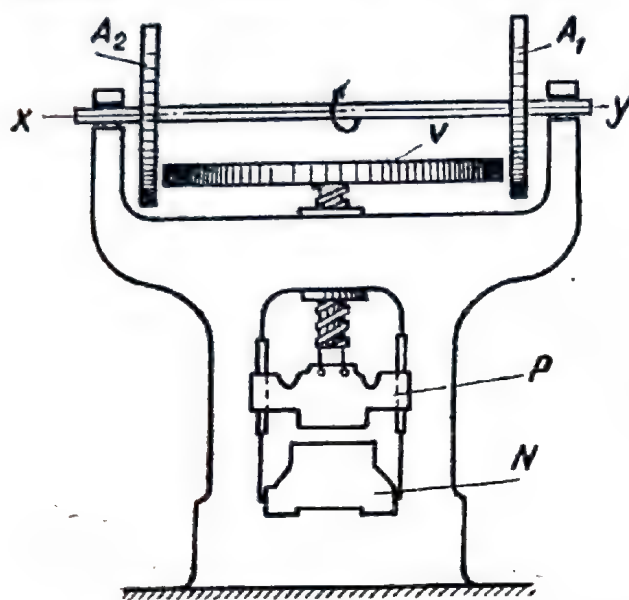


Fig. 6.28.

discuri este puțin mai mare decât diametrul volantului  $V$ . Se cere să se descrie modul de funcționare al acestei prese, arătând totodată și mișcările pe care le execută fiecare dintre elementele ei componente, presupunând că arborele  $xy$  se rotește cu viteză unghiulară constantă.

#### Rezolvare

Când arborele  $xy$  se rotește, discurile  $A_1, A_2$  execută o mișcare de rotație în jurul axei fixe  $xy$ .

În timpul în care axa  $xy$  este manevrată astfel încât unul dintre discuri să atingă marginea volantului  $V$ , discurile  $A_1, A_2$  execută o mișcare elicoidală. Dacă discul  $A_1$  atinge periferia volantului  $V$ , acesta este pus în mișcare prin fricțiune; el începe să se rotească în timp ce coboară, executând o mișcare de șurub neuniformă deoarece pe măsură ce se depărtează de axa  $xy$  viteza sa periferică crește. Poansonul  $P$  coboară vertical ghidat pe batiul mașinii, executând o mișcare de translație rectilinie variată, deoarece el coboară din ce în ce mai repede pînă la contactul cu nicovala  $N$ . Pentru a ridica poansonul  $P$ , se pune în contact cu periferia volantului  $V$  celălalt disc,  $A_2$ .

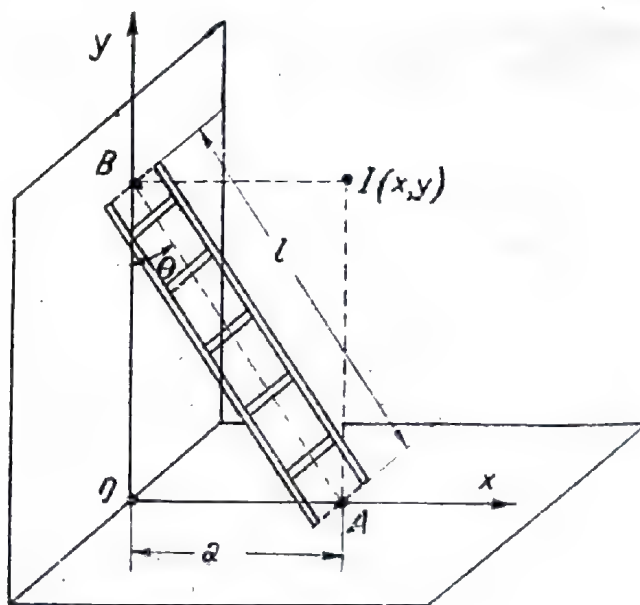


Fig. 6.29.

d) O scară  $AB$  alunecă cu cele două extremități ale sale  $A$  și  $B$  pe doi pereți, dintre care unul este orizontal, iar celălalt vertical.

Se cere să se determine centrul instantaneu din mișcarea plan-paralelă a scării, pentru poziția din figura 6.29, când planul scării face cu planul vertical unghiul  $\theta$ .

### Rezolvare

Pentru determinarea coordonatelor centrului instantaneu de rotație  $I$  vom folosi formulele (6.63). Vom alege punctul  $A$  la contactul secțiunii mediane a scării cu planul orizontal; coordonatele sale sînt :

$$a=l \sin \theta, \quad b=0.$$

Derivînd aceste coordonate în raport cu unghiul  $\theta$ , avem :

$$\frac{da}{d\theta} = l \cos \theta, \quad \frac{db}{d\theta} = 0.$$

Înlocuind acum în formulele (6.63) obținem :

$$x=l \sin \theta - 0 = l \sin \theta,$$

$$y=0 + l \cos \theta = l \cos \theta.$$

Se observă ușor că  $x = OA$  și  $y = OB$ ; punctul  $I$  este unul din vîrfurile dreptunghiului  $OBIA$  (fig. 6.29). El poate fi determinat ca intersecția perpendicularelor pe vitezele a două puncte. Punctele  $A$  și  $B$  ale scării au vitezele îndreptate în lungul axelor  $Ox$  și  $Oy$ ; perpendicularele pe aceste axe sînt dreptele  $IA$  și  $IB$ , care se intersectează în punctul  $I$ .

## Capitolul VII

### CINEMATICA SISTEMELOR MATERIALE ÎN RAPORT CU UN SISTEM MOBIL

#### 1. Mișcarea relativă a punctului material (compunerea mișcărilor simultane ale punctului)

a) Mișcarea aceluiași corp observată dintr-un sistem de referință fix și dintr-un sistem de referință mobil. Diferitele mișcări ale corpurilor studiate pînă aci au fost raportate la un



sistem de referință care poate fi considerat fix. În natură și în tehnică se întâlnesc însă de foarte multe ori situații în care sînt obligați să raportăm mișcarea diferitelor corpuri la sisteme de referință mobile. Prima întrebare pe care ne-o punem în aceste cazuri este aceea dacă traiectoriile, vitezele și accelerațiile punctelor corpului respectiv observate din sistemul mobil sînt identice cu cele observate din sistemul fix. Cîteva exemple ne vor da răspuns negativ la această întrebare.

Să considerăm mișcarea de cădere liberă a unei pietre pe verticala descendentă. Un observator așezat pe Pămînt, considerat ca sistem de referință fix, va descrie această mișcare ca fiind o mișcare rectilinie uniform accelerată. Să ne imaginăm că, în timp ce piatra se mișcă, o împrejmuiim cu o cabină aflată de asemenea în cădere liberă și în care se găsește un observator; acesta, aflat în sistemul de referință mobil constituit de cabină, va spune că piatra se află în repaus, deoarece el căzînd o dată cu cabina și piatra (fără a-și da seama de această mișcare) vede piatra nemișcată.

Să considerăm mișcarea vîrfului unui cuțit de strung față de batiul mașinii, considerat ca sistem fix, și față de piesa strunjită, considerată ca sistem mobil; față de batiul mașinii, vîrfului cuțitului descrie o mișcare rectilinie uniformă, în timp ce față de piesa aflată în mișcare, același vîrf al cuțitului descrie o mișcare pe elice.

Deoarece caracteristicile mișcării aceluiași corp considerate față de un sistem fix și față de un sistem mobil diferă între ele, ne propunem să determinăm în cele ce urmează care sînt relațiile care leagă între ele aceste caracteristici.

**b) Elemente și noțiuni importante privind mișcarea relativă a punctului material.** La studiul mișcării relative a punctului material intervin ca elemente: un punct mobil, un sistem de referință mobil și un sistem de referință fix. Problema care se pune în general este aceea de a determina mișcarea punctului material față de sistemul fix, cunoscînd mișcarea punctului față de sistemul mobil și a sistemului mobil față de sistemul fix.

Operația prin care se determină viteza și accelerația punctului mobil față de sistemul de referință fix se mai numește și *compunerea mișcărilor punctului considerat* (fig. 7.1).

În mișcarea relativă a punctului material intervin trei noțiuni importante:

— *mișcarea absolută* este mișcarea punctului considerat în raport cu sistemul de referință fix; se numește *viteză absolută*

și accelerație absolută viteza respectiv accelerația punctului în această mișcare. Dacă sistemul de referință fix este un triedru cartezian, proiecțiile vitezei absolute, respectiv ale accelerației absolute pe axele acestui triedru se obțin derivând o dată, respectiv de două ori, în raport cu timpul coordonatele punctului față de acest triedru;

— *mișcarea relativă* este mișcarea punctului considerat în raport cu sistemul de referință mobil; se numește *viteză rela-*

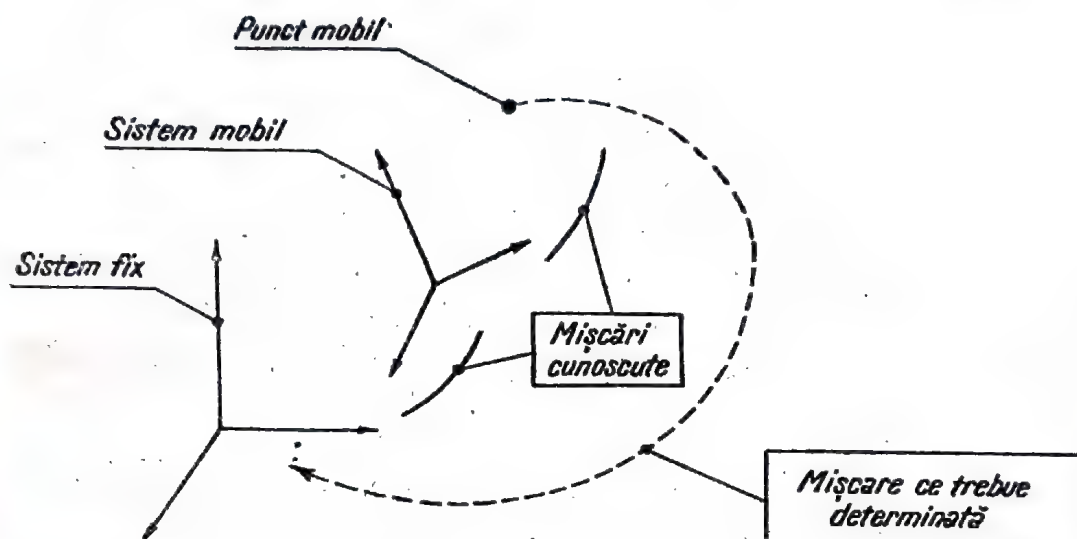


Fig. 7.1.

*tivă și accelerație relativă* viteza, respectiv accelerația punctului în această mișcare. Dacă sistemul de referință mobil este un triedru cartezian, proiecțiile vitezei relative, respectiv ale accelerației relative pe axele acestui triedru se obțin derivând o dată, respectiv de două ori, în raport cu timpul coordonatele punctului față de acest triedru;

— *mișcarea de transport* este mișcarea în raport cu triedrul fix a celui punct aparținând triedrului mobil care, în momentul considerat, coincide cu punctul mobil a cărui mișcare se studiază, adică mișcarea pe care ar avea-o punctul dacă mișcarea relativă ar înceta; se numește *viteză de transport și accelerație de transport* viteza, respectiv accelerația celui punct aparținând triedrului mobil care în momentul considerat coincide cu punctul mobil a cărui mișcare se studiază; ele se determină cu ajutorul formulelor cunoscute de la cinematica rigidului, după mișcarea pe care o are sistemul mobil considerat.

c) **Compunerea vitezelor în mișcarea relativă a punctului material.** Să presupunem că mișcarea sistemului de referință mobil față de sistemul fix este o mișcare plan-paralelă (fig. 7.2).



Punctul mobil  $M$  nu mai este fix în planul mișcării, ci are și el o mișcare proprie în planul  $XAY$  (mișcarea relativă) cu viteza  $\bar{v}_r$ , ale cărei componente sînt derivatele coordonatelor sale din acest plan :

$$v_{rx} = \dot{X}, \quad v_{ry} = \dot{Y}. \quad (7.1)$$

Viteza de transport  $\bar{v}_t$  a punctului  $M$  este viteza pe care o obținem dacă punctul  $M$  este considerat fix pe planul  $XAY$ ; această viteză am determinat-o la capitolul VI (formulele 6.60) :

$$\begin{aligned} v_{tx} &= v_{Ax} - \omega (y - b), \\ v_{ty} &= v_{Ay} + \omega (x - a). \end{aligned} \quad (7.2)$$

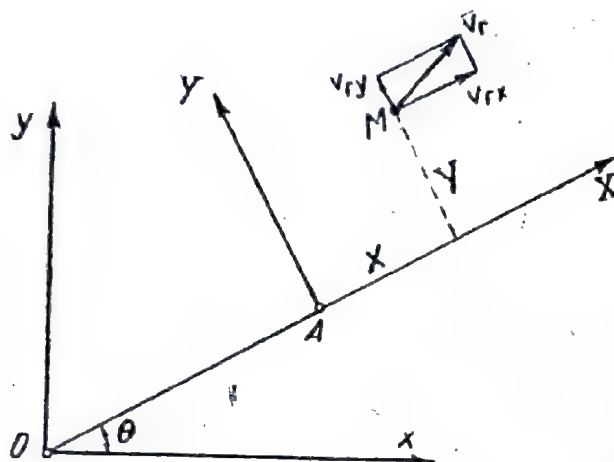


Fig. 7.2.

Pentru aflarea proiecțiilor vitezei absolute vom deriva coordonatele  $x, y$  ale punctului mobil față de sistemul fix  $xOy$  (formulele (6.58)) ținînd seama că de această dată  $X$  și  $Y$  sînt variabile; obținem :

$$\begin{aligned} v_{ax} &= \dot{a} + \dot{X} \cos \theta - X \sin \theta \omega - \dot{Y} \sin \theta - Y \cos \theta \omega, \\ v_{ay} &= \dot{b} + \dot{X} \sin \theta + X \cos \theta \omega + \dot{Y} \cos \theta - Y \sin \theta \omega \end{aligned} \quad (7.3)$$

sau ținînd seama de relațiile :

$$\dot{a} = v_{Ax}, \quad \dot{b} = v_{Ay}, \quad (7.4)$$

$$\dot{X} = v_{rx}, \quad \dot{Y} = v_{ry},$$

avem :

$$\begin{aligned} v_{ax} &= v_{Ax} + v_{rx} \cos \theta - \omega (X \sin \theta + Y \cos \theta) - v_{ry} \sin \theta, \\ v_{ay} &= v_{Ay} + v_{rx} \sin \theta + v_{ry} \cos \theta + \omega (X \cos \theta - Y \sin \theta). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Dar în baza formulelor (6.58) putem scrie :

$$\begin{aligned} v_{ax} &= v_{Ax} + v_{rx} \cos \theta - v_{ry} \sin \theta - \omega (y - b), \\ v_{ay} &= v_{Ay} + v_{rx} \sin \theta + v_{ry} \cos \theta + \omega (x - a). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Pe de altă parte, din figura 7.2 se vede că expresia  $v_{rx} \cos \theta - v_{ry} \sin \theta$  reprezintă suma proiecțiilor componentelor vitezei  $v_r$  pe axele  $Ox$  și  $Oy$ ; deci :

$$\begin{aligned} v_{rx} \cos \theta - v_{ry} \sin \theta &= v_{rx}, \\ v_{rx} \sin \theta + v_{ry} \cos \theta &= v_{ry}. \end{aligned} \quad (7.7)$$



Cu aceasta, formulele (7.6) se scriu :

$$\begin{aligned} v_{ax} &= v_{rx} + v_{lx}, \\ v_{ay} &= v_{ry} + v_{ly}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

sau, sub formă vectorială :

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_l. \quad (7.9)$$

Aceasta este formula de compunere a vitezelor în mișcarea relativă ; ea arată că *viteza absolută a unui punct este egală cu suma vectorială dintre viteza relativă și viteza de transport a punctului.*

d) **Compunerea accelerațiilor în mișcarea relativă a punctului material.** Procedul pentru aflarea accelerației absolute este același ca și în cazul aflării vitezei absolute. Formula care se obține este :

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_l + \bar{a}_c. \quad (7.10)$$

Termenul  $\bar{a}_c$  poartă numele de accelerația lui Coriolis, după numele savantului francez Gustave Coriolis care a descoperit-o.

Formula (7.10) arată că *accelerația absolută a unui punct este egală cu suma vectorială dintre accelerația relativă, accelerația de transport și accelerația lui Coriolis.*

Accelerația lui Coriolis este nulă dacă sistemul de referință mobil se află în mișcare de translație ( $\bar{\omega} = 0$ ) sau dacă punctul mobil se mișcă astfel încât viteza sa relativă este paralelă cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}$ , (exemplu : mișcarea unui punct mobil pe generatoarea unui cilindru circular drept care se rotește în jurul axei sale).

Pentru cazul mișcărilor în care viteza relativă  $\bar{v}_r$  este perpendiculară pe viteza unghiulară de rotație a sistemului mobil  $\bar{\omega}$ , direcția și sensul accelerației lui Coriolis coincid cu acelea ale vectorului  $\bar{v}_r$  rotit de  $90^\circ$  în planul perpendicular pe vectorul  $\bar{\omega}$  și în sensul rotației sistemului mobil ; modulul său este în acest caz  $2\omega v_r$ .

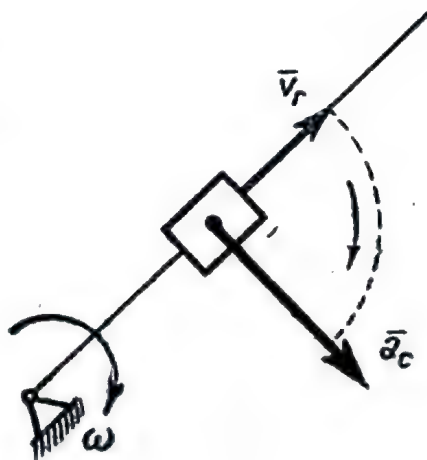


Fig. 7.3.

În figura 7.3 este arătată determinarea accelerației lui Coriolis prin această metodă pentru un cursor care se mișcă cu vi-

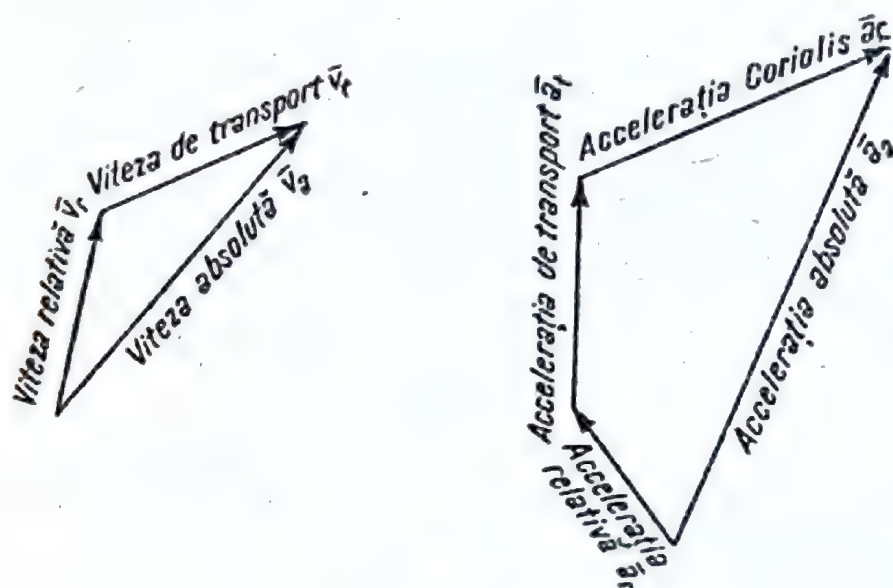


Fig. 7.4.

teza relativă  $\vec{v}_r$ , față de o bară care se rotește cu viteza unghiulară  $\omega$ , iar în figura 7.4 este arătată grafic compunerea vitezelor și accelerațiilor punctului.

## 2. Mișcarea relativă a solidului rigid (compunerea mișcărilor simultane ale unui solid rigid)

În practică se întâlnește de multe ori cazul unui solid rigid supus simultan la mai multe mișcări; ca exemplu poate servi cuțitul unui strung, care poate fi supus simultan la două mișcări de translație rectilinii, și anume: o mișcare relativă (1) a dispozitivului portcuțit avînd direcția perpendiculară pe aceea a deplasării saniei, și o mișcare de transport (2) a saniei (fig. 7.5), sau mișcarea oalei cu metal dintr-o turnătorie care este supusă simultan la trei mișcări de translație perpendiculare una pe alta (translația podului, a pisicii și a cîrligului).

În asemenea cazuri se pune problema de a se studia modul în care sînt repartizate la un moment dat vitezele și accelerațiile în diferitele puncte ale solidului. Deoarece problema repartiției accelerațiilor este ceva mai complicată, ne vom limita în cele ce urmează numai la studiul modului de repartiție al vitezelor. Mai precis, problema compunerii mișcărilor simultane ale unui solid rigid poate fi formulată astfel:



Se dau un corp solid, mai multe sisteme de referință mobile și un sistem de referință fix; cunoscând mișcarea solidului rigid față de un sistem mobil de referință, a acestui sistem mobil față de altul ș.a.m.d., se cere să se determine modul în care sînt repartizate la un moment dat vitezele diferitelor puncte ale solidului luate în raport cu sistemul de referință fix.

Operația prin care se determină legea de distribuție a vitezelor corpului solid considerat față de sistemul de referință fix se numește *compunerea mișcărilor acelui solid*; mișcarea corpului solid considerat față de sistemul fix se numește *mișcare rezultantă*, iar mișcărilor relative intermediare se numesc *mișcări componente*.

Vom considera rezolvată această problemă atunci cînd vom determina viteza unui punct oarecare al solidului ca funcție de mișcărilor intermediare, așa cum este arătat schematic în figura 7.6.

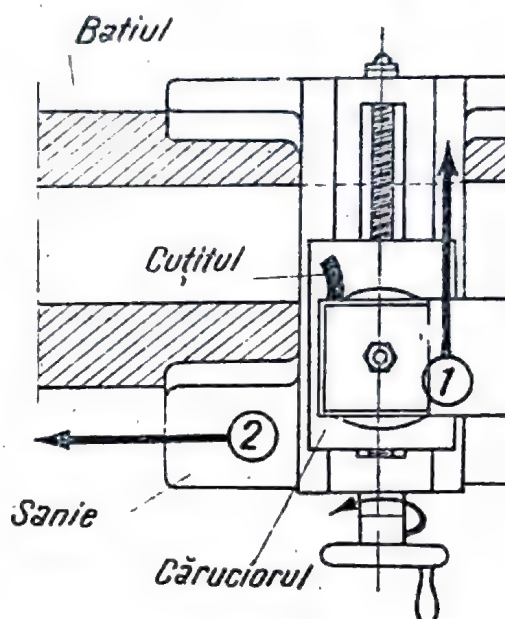


Fig. 7.5.

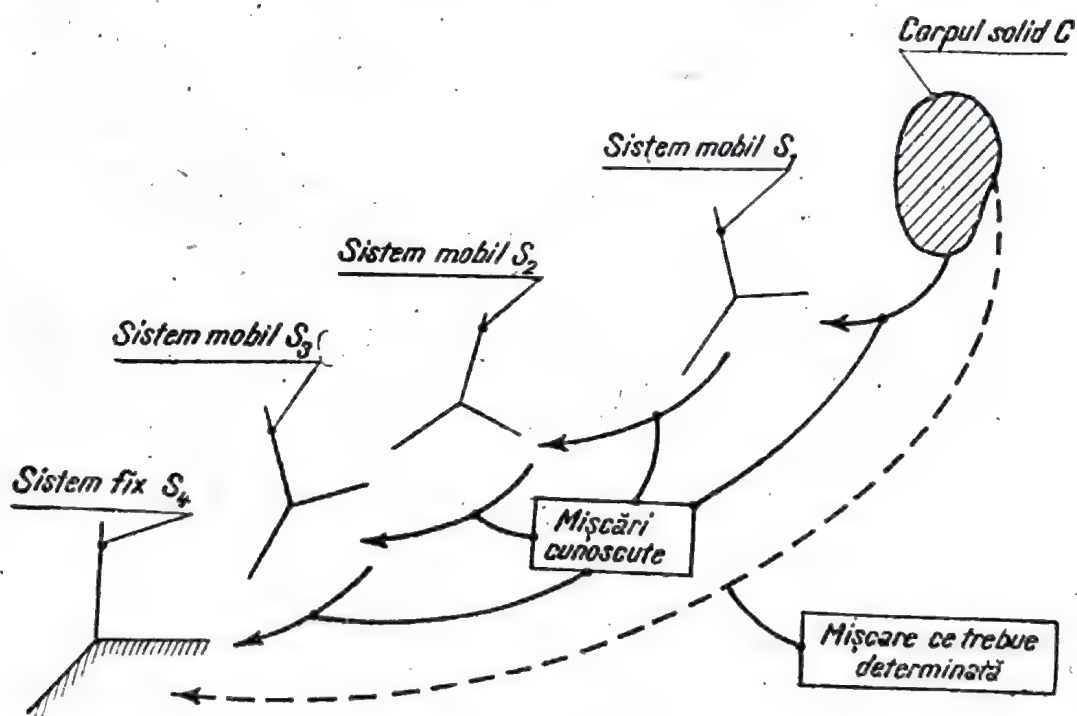


Fig. 7.6.



a) **Compuneri de translații simultane.** Vom considera mai întâi cazul particular cel mai simplu al acestei probleme, și anume acela în care mișcarea relativă a corpului solid considerat ( $C$ ) față de sistemul mobil  $S_1$ , a sistemului mobil  $S_1$  față de sistemul mobil  $S_2$  ș.a.m.d., a ultimului sistem mobil față de sistemul fix sînt translații. Un exemplu de asemenea caz îl constituie mișcarea prismelor din figura 7.7.

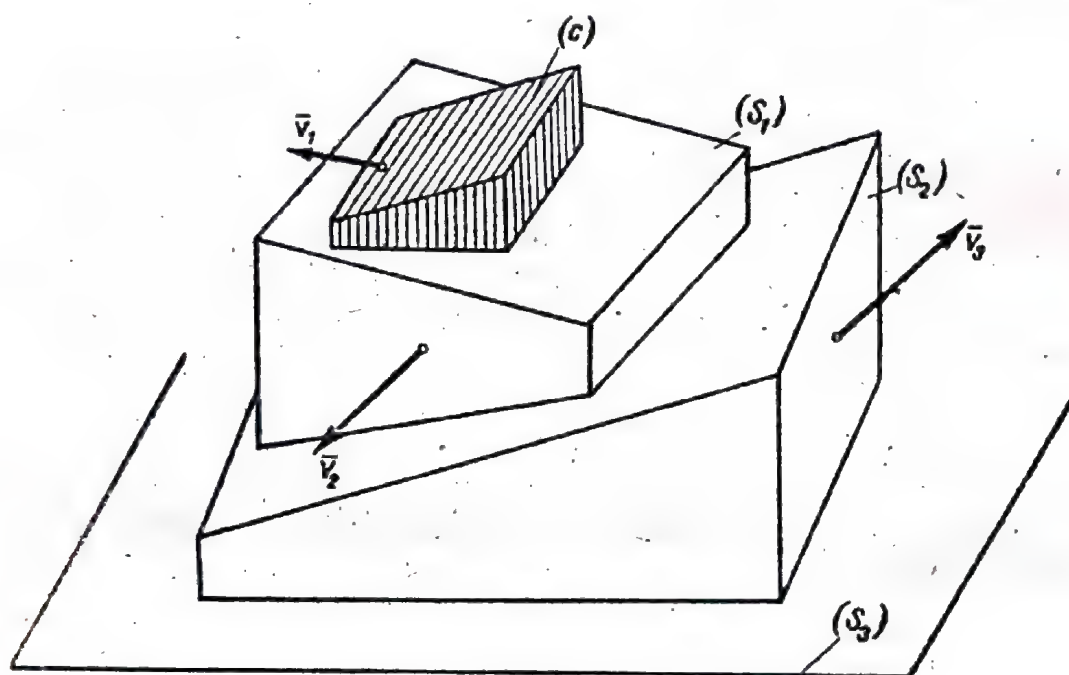


Fig. 7.7.

Vitezele de translație le vom nota astfel : viteza de translație a corpului ( $C$ ) față de sistemul mobil ( $S_1$ ) o vom nota prin  $v_1$  ; viteza de translație a sistemului mobil  $S_1$  față de sistemul mobil  $S_2$  o vom nota prin  $v_2$  ș.a.m.d. După cele ce cunoaștem de la studiul mișcării de translație a solidului rigid, toate punctele unui corp aflat în mișcare de translație au aceeași viteză.

Să alegem acum un punct oarecare  $M$  al solidului a cărui mișcare o studiem ; acesta are, ca de altfel toate punctele solidului, viteza  $v_1$  față de sistemul mobil  $S_1$ . Punctul corespunzător lui  $M$  din sistemul mobil  $S_1$  va avea față de sistemul mobil  $S_2$  viteza  $v_2$ . În adevăr, după cele cunoscute de la mișcarea relativă a punctului, pentru a determina această viteză (viteza de transport) considerăm că mișcarea relativă a corpului  $C$  față de sistemul mobil  $S_1$  încetează și determinăm astfel viteza punctului  $M$  față de sistemul de referință  $S_2$ . Considerăm acum mișca-

rea punctului  $M$  față de sistemul mobil  $S_1$  ca mișcare relativă, iar mișcarea sistemului mobil (1) față de sistemul mobil (2) ca mișcare de transport, viteza „absolută” a punctului  $M$  față de sistemul mobil (2) va fi, după formula (7.10) :

$$\bar{v}_a = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 .$$

Această viteză am denumit-o „absolută”, deoarece sistemul de referință (2) nu este fix, ci se află la rândul său în mișcare față de sistemul (3). Aceasta înseamnă că viteza astfel obținută este de fapt tot o viteză relativă. Pentru a obține o nouă viteză „absolută”  $\bar{v}'_a$  de această dată față de sistemul de referință (3), va trebui ca la viteza  $\bar{v}_a$  să adăugăm viteza de transport  $\bar{v}_3$ ; rezultă :

$$\bar{v}'_a = \bar{v}_a + \bar{v}_3 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 .$$

Acest raționament poate fi din nou repetat, întrucât sistemul de referință (3) este de asemenea mobil. Procedând în acest mod pînă ce sistemul de referință față de care se calculează viteza punctului  $M$  este sistemul fix, vom obține viteza punctului  $M$  față de acest sistem ; ea are expresia :

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_n = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i . \quad (7.11)$$

În cazul reprezentat în figura 7.7,  $n = 3$ .

Rezultatul obținut poate fi enunțat astfel : *prin compunerea unui număr oarecare de mișcări avînd distribuții de viteze*

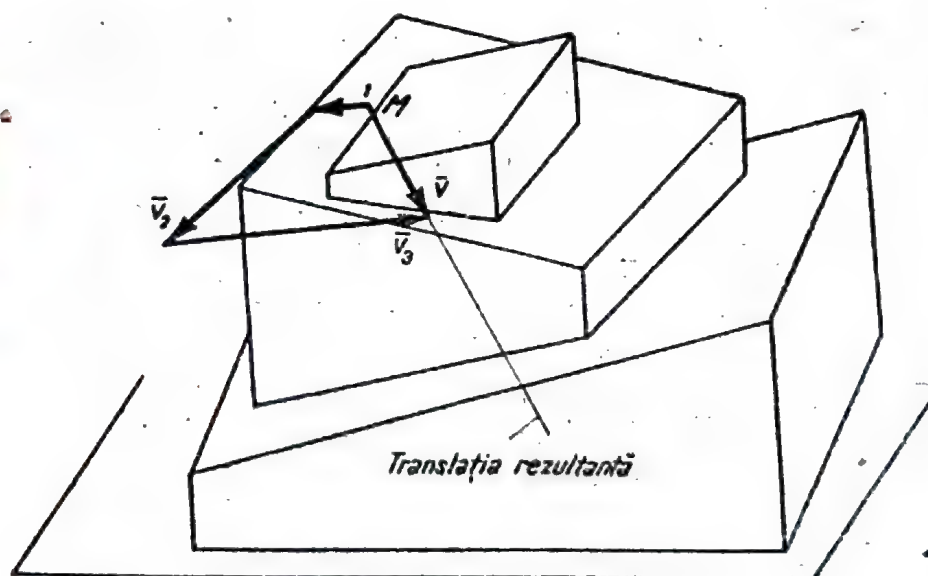


Fig. 7.8.



caracteristice mișcărilor de translație se obține o mișcare rezultantă avînd o distribuție de viteze de asemenea caracteristică unei mișcări de translație; viteza de translație a mișcării rezultante este egală cu suma vectorială a vitezelor mișcărilor componente (fig. 7.8).

Faptul că mișcările de translație componente sînt translații se interpretează în sensul că vitezele  $\vec{v}_i$  ale acestor mișcări își pot schimba atît mărimea cît și orientarea de la un moment la altul; legea de găsim a vitezei rezultante exprimată prin relația (7.11) își păstrează însă valabilitatea în orice moment.

În baza analogiei dintre viteza de translație și vectorul moment al unui cuplu de forțe, rezultă că modul de obținere a vitezei  $\vec{v}$  este analog celui prin care se obține vectorul moment resultant al unui sistem de cupluri oarecare în spațiu.

**b) Compuneri de rotații concurente simultane.** Un alt caz particular al compunerii mișcărilor îl constituie acela în care mișcarea relativă a corpului solid  $C$  considerat față de sistemul mobil  $S_1$ , a sistemului mobil  $S_1$  față de sistemul mobil  $S_2$  ș.a.m.d., a ultimului sistem mobil față de sistemul fix sînt rotații, ale căror axe sînt concurente într-un punct  $O$ , fix în spațiu (fig. 7.9, a).

Vitezele unghiulare de rotație le vom nota, analog cazului compunerii translațiilor, astfel: viteza unghiulară de rotație a corpului  $C$  față de sistemul mobil  $S_1$  o vom nota prin  $\omega_1$ ; viteza unghiulară de rotație a sistemului mobil  $S_1$  față de sistemul mobil  $S_2$  o vom nota prin  $\omega_2$  ș.a.m.d. După cîte cunoaștem de la studiul mișcării circulare a punctului, viteza unui punct mobil  $M$  care descrie o mișcare circulară este momentul vectorului  $\vec{\omega}$  în raport cu punctul  $M$ .

Să studiem mișcarea punctului  $M$ . Viteza sa față de sistemul mobil  $S_1$  este dată de momentul vectorului  $\vec{\omega}_1$  în raport cu punctul  $M$ .

Punctul corespunzător lui  $M$  din sistemul mobil  $S_1$  va avea față de sistemul mobil  $S_2$  viteza  $\vec{v}_1$ , dată de momentul vectorului  $\vec{\omega}_2$  față de punctul  $M$ .

Această viteză o determinăm considerînd corpul  $C$  solidar cu sistemul mobil  $S_1$  și studiind mișcarea punctului  $M$  față de sistemul de referință  $S_2$ .

Considerînd acum mișcarea punctului  $M$  față de sistemul mobil  $S_1$  ca mișcarea relativă și mișcarea sistemului  $S_1$  față de sistemul  $S_2$  ca mișcare de transport, vom obține viteza punctului  $M$  față de sistemul de referință  $S_2$ ; după cele cunoscute



de la mișcarea relativă a punctului, aceasta se obține prin adunarea vitezei relative  $\bar{v}$ , și a vitezei de transport  $\bar{v}_t$ :

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_r + \bar{v}_t,$$

sau, ceea ce e totuna, a momentelor date de vectorii  $\bar{\omega}_1$  și  $\bar{\omega}_2$  față de punctul  $M$ .

Repetînd raționamentul de mai sus, din aproape în aproape, adică considerînd această viteză ca viteză relativă față de sis-

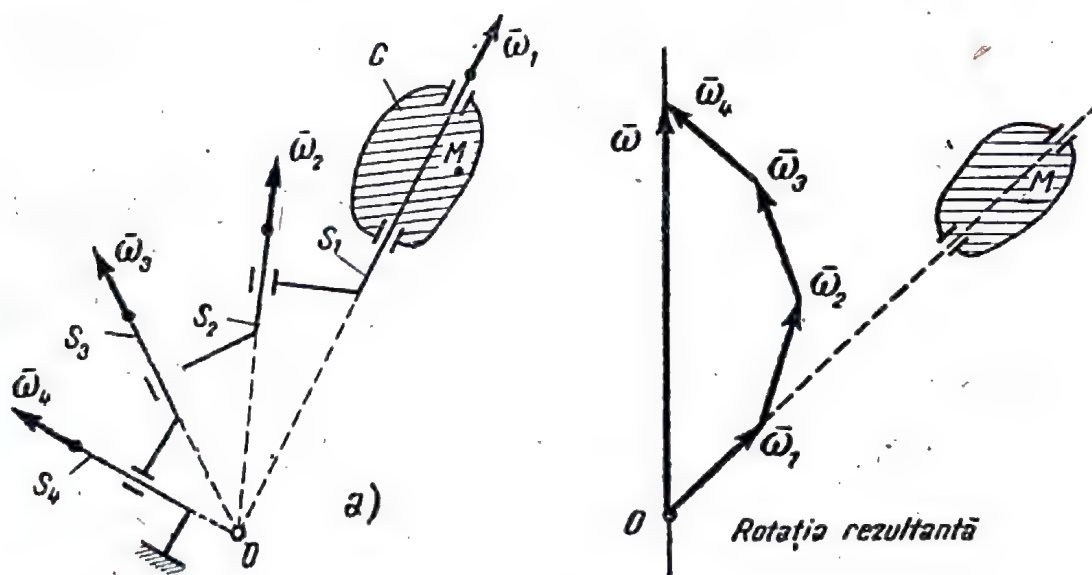


Fig. 7.9.

temul de referință  $S_2$  și adunînd-o cu viteza de transport (viteza punctului  $M$  considerat solidar cu sistemul  $S_2$  față de sistemul de referință  $S_3$ ) ș.a.m.d. pînă ce ultimul sistem de referință față de care se calculează viteza punctului  $M$  este sistemul de referință fix, vom obține viteza punctului  $M$  față de acest sistem; ea este reprezentată de suma momentelor vectorilor  $\bar{\omega}$  în raport cu punctul  $M$ .

Cum vectorii  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n$  formează un sistem de vectori concurenți, în baza teoremei lui Varignon rezultă că suma momentelor vectorilor  $\bar{\omega}$  în raport cu punctul  $M$  este egală cu momentul rezultantei în raport cu același punct.

Rezultanta  $\bar{\omega}$  are expresia

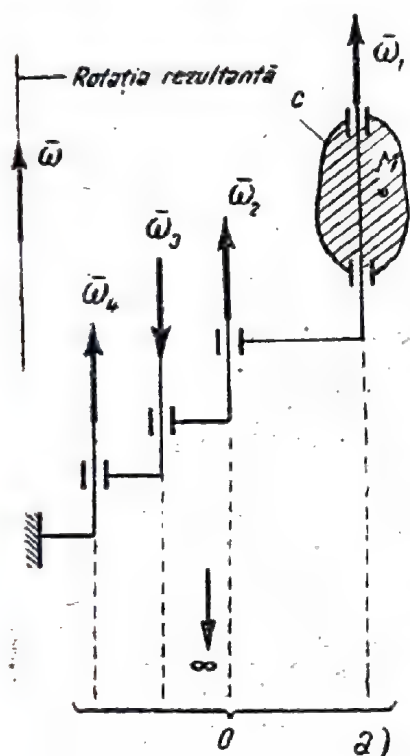
$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_n = \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i \quad (7.12)$$

Rezultatul obținut poate fi enunțat astfel: prin compunerea unui număr oarecare de mișcări de rotație cu axe concurențe

într-un punct  $O$  fix în spațiu se obține o mișcare rezultantă de rotație, a cărei axă trece tot prin punctul  $O$ ; viteza unghiulară  $\omega$  mișcării rezultante este egală cu suma vectorială a vitezelor unghiulare instantanee ale mișcărilor componente (fig. 7.9, b).

Faptul că mișcările de rotație componente sînt rotații instantanee se interpretează în sensul că vitezele unghiulare  $\omega_i$  ale acestor mișcări își pot schimba atît mărimea cît și orientarea de la un moment la altul, putînd rămîne sau nu concurente în  $O$ ; legea de găsim a vitezei unghiulare rezultante exprimată prin relația (7.12) își păstrează valabilitatea pentru orice moment în care axele tuturor rotațiilor sînt concurente.

În baza analogiei dintre viteza unghiulară și vectorul forță rezultă că modul de obținere a vitezei unghiulare  $\omega$  este analog celui prin care se obține rezultanta unui sistem de forțe concurente (fig. 7.9, b).



c) **Compuneri de rotații paralele simultane.** Să presupunem acum că punctul de intersecție  $O$  a axelor instantanee de rotație ale mișcărilor componente se depărtează la infinit; în acest caz, va trebui să compunem un număr de rotații paralele simultane (fig. 7.10, a).

Notarea vitezelor unghiulare de rotație ale mișcărilor componente de la cazul precedent al compunerii rotațiilor concurente rămîne valabilă și în acest caz.

Metoda de rezolvare a acestui caz va fi similară celei folosite în cazul precedent cu singura deosebire că punctul de intersecție al axelor va fi la infinit.

Un caz particular al compunerii rotațiilor paralele este acela al compunerii a două rotații paralele, egale și de sensuri contrare (cuplu de rotații), arătat în figura 7.10, b. Mișcarea rezultantă este o translație, după cum se poate constata și din următoarea experiență simplă: se ia o foaie de hîrtie și se ro-

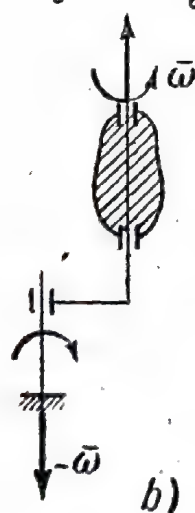


Fig. 7.10.



tește pe masă în jurul a două axe perpendiculare pe planul său, în sensuri contrare, de un același unghi; foaia se deplasează din poziția inițială în poziția finală ca și cum ar fi executat o translație în planul mesei.

Fără a mai relua demonstrația acestui caz vom enunța rezultatul astfel: *prin compunerea unui număr oarecare de mișcări de rotație cu axele paralele se obține o mișcare rezultantă de rotație sau de translație după cum  $\Sigma \omega_i \neq 0$  sau  $\Sigma \omega_i = 0$ ; în primul caz, viteza unghiulară a mișcării rezultante este egală cu suma vectorială (vectori coliniari) a vitezelor unghiulare instantanee ale mișcărilor componente; ea trece prin centrul vectorilor paraleli.*

d) Alte cazuri de compuneri de mișcări simultane ale solidului rigid. În afară cazurilor examinate se mai întâlnesc și alte compuneri de mișcări simultane ale solidului rigid. Doua dintre ele au fost studiate la mișcarea solidului rigid, și anume:

— din compunerea unei translații cu o rotație avînd axa paralelă cu aceea a translației rezultă o mișcare elicoidală;

— din compunerea unei translații cu o rotație avînd axa perpendiculară pe aceea a translației rezultă o mișcare plan-paralelă.

De fapt, toate cazurile studiate pînă aci sînt cazuri particulare ale compunerii mai multor mișcări elicoidale instantanee; într-adevăr, atît mișcarea de translație cît și cea de rotație sînt cazuri particulare ale mișcării elicoidale. Nu vom demonstra acest caz, ci vom enunța doar rezultatul: *din compunerea unui număr oarecare de mișcări avînd distribuții de viteze caracteristice mișcărilor elicoidale instantanee se obține o mișcare rezultantă avînd o distribuție de viteze caracteristică unei mișcări elicoidale.* Prin particularizarea acestui caz se obțin toate cazurile de compuneri de mișcări studiate pînă aci.

### 3. Aplicații

a) Se consideră o camă triunghiulară care se deplasează cu viteza  $v_0$ .

Profilul camei este format dintr-o linie dreaptă înclinată cu unghiul  $\alpha$  față de direcția mișcării camei. Ea pune în mișcare un tachtet care se deplasează vertical într-un ghidaj. Se



care viteza  $\bar{v}$  cu care se deplasează tachelul și viteza relativă  $\bar{v}_r$  de alunecare a tachelului pe camă (fig. 7.11, a).

### Rezolvare

Vom studia mișcarea punctului  $M$  de contact dintre tachel și camă considerînd drept sistem de referință fix ghidajul tachelului și drept sistem de referință mobil cama. Cele trei viteze ale punctului  $M$  sînt :

— viteza absolută este viteza punctului  $M$  față de ghidajul tachelului ; se cunoaște numai direcția sa, deoarece tachelul are o mișcare de translație rectilinie ;

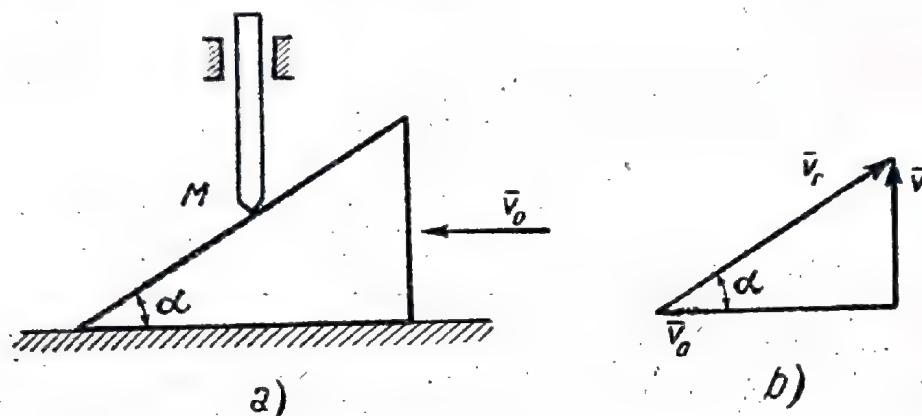


Fig. 7.11.

— viteza relativă este viteza punctului  $M$  față de camă ; se cunoaște direcția sa, deoarece ea este dirijată în lungul profilului camei ;

— viteza de transport este viteza punctului  $M$  dacă acesta ar fi solidar cu cama ; ea este chiar viteza  $\bar{v}_0$  ( $\bar{v}_t = \bar{v}_0$ ).

Relația (7.10) :

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$$

construită grafic este arătată în figura 7.11, b.

Din triunghiul vitezelor rezultă :

$$v_a = v_0 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$v_r = \frac{v_0}{\cos \alpha}.$$

Deoarece tachelul are o mișcare de translație, toate punctele sale vor avea viteza  $\bar{v}$ .

Se observă că atât viteza de deplasare a tachelului cât și viteza sa relativă cresc o dată cu creșterea unghiului  $\alpha$ .

b) Se consideră un rulment radial cu bile; arborele are o turație  $n_2 = 300$  rot/min. Se cere să se determine turația unei bile a rulmentului în jurul axei sale (fig. 7.12, a). Rulmentul are raza inelului interior  $R = 80$  mm și diametrul bilei  $d \approx 40$  mm.

### Rezolvare

Vom presupune că bilele rulmentului se rostogolesc fără să alunece atât pe inelul interior al rulmentului, care este solidar cu arborele, cât și pe cel exterior, care este fix în lagăr.

Dacă alegem arborele drept sistem de referință mobil și lagărul drept sistem de referință fix, deosebim următoarele mișcări ale bilei rulmentului:

- mișcarea absolută este mișcarea bilei față de lagăr; ea este o mișcare plan-paralelă sau o rotație instantanee cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}$  trecând prin punctul  $A$  de contact al bilei cu inelul exterior;

- mișcarea relativă este mișcarea bilei față de arbore; ea este tot o mișcare plan-paralelă sau o rotație instantanee cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_1$  trecând prin punctul  $B$  de contact al bilei cu inelul interior;

- mișcarea de transport este mișcarea arborelui cu viteza unghiulară  $\bar{\omega}_2$ .

Mișcarea rulmentului față de lagăr poate fi considerată ca rezultând din compunerea a două rotații paralele (fig. 7.12 b). Rezultă deci:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$\omega_2 (R + d) - \omega_1 d = 0,$$

de unde:

$$\omega = \frac{R}{d} \omega_2;$$

$$n = \frac{30 \omega}{\pi} = \frac{30}{\pi} \frac{R}{d} \omega_1 = \frac{30}{\pi} \times \frac{80}{40} \times \frac{\pi \times 300}{30} = 600 \text{ rot/min.}$$

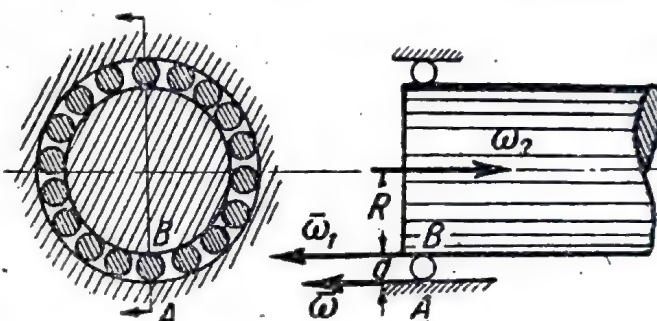


Fig. 7.12.

## Capitolul VIII

### APLICAȚIILE TEHNICE ALE CINEMATII

În capitolele cinematicii studiate pînă aci ne-am ocupat de mișcarea punctului material și a solidului rigid; în tehnică nu se întîlnesc însă punctele materiale sau corpuri solide izolate, ci mecanisme, mașini, instalații conținînd mai multe corpuri solide aflate în mișcare, astfel încît mișcările diferitelor corpuri care le alcătuiesc depind una de alta datorită interacțiunii corpurilor. Asemenea ansambluri de corpuri care interacționează în timpul mișcării formează, după cum știm, sisteme de corpuri. În cele ce urmează ne vom ocupa de cîteva sisteme de corpuri care au o utilizare mai largă în tehnică. Vom trata numai sisteme de corpuri avînd un singur grad de libertate, la care vom determina relațiile dintre vitezele diferitelor corpuri care alcătuiesc sistemul respectiv.

#### 1. Mecanisme cu elemente flexibile

Pentru transmiterea mișcării de rotație între arbori situați la distanță mare se folosesc mecanisme cu elemente flexibile: curele, benzi, cabluri, lanțuri. Astfel, transmisiile cu benzi sînt folosite la transportoarele care servesc la mecanizarea transporturilor materialelor vărsate și granuloase; transmisiile cu cabluri sînt utilizate la mașinile de ridicat din industria grea sau a construcțiilor, care folosesc scripeți, tambure, cilindri, cabestane; transmisiile cu curele sînt întrebuințate în industria grea, în industria ușoară sau a construcțiilor; transmisiile cu lanțuri înlocuiesc pe cele cu cabluri sau curele în cazul eforturilor mari sau cînd se cere ca raportul de transmisie să fie riguros constant, fără variații, așa cum se întîmplă în timpul patinării pe tambure a curelelor sau cablurilor.

O transmisie cu cureaua se compune din două roți *I* și *II* și o cureaua întinsă peste ele; dacă cele două roți au același sens de rotație, transmisiile se numesc *directe* (fig. 8.1, *a*), iar dacă ele au sensuri contrare de rotație, se numesc *inverse sau cu cureaua încrucișată* (fig. 8.1, *b*).

Pentru studiul cinematic al unei transmisii cu cureaua vom presupune că nu există alunecare între cureaua și roți, iar cureaua nu se deformează în timpul mișcării.



Parametrii geometrici care caracterizează mișcarea celor două roți considerate ca solid cu axă fixă sînt unghiurile  $\theta_1 = \theta_1(t)$  și  $\theta_2 = \theta_2(t)$ . Relația dintre ei se află astfel : în timp ce punctul  $A$  de la periferia roții  $I$  a parcurs drumul  $AA' = R_1\theta_1$ , punctul  $B$  de la periferia roții  $II$  a parcurs drumul  $BB' = R_2\theta_2$ ; cureaua fiind inextensibilă, aceste două drumuri trebuie să fie egale, adică :

$$R_1\theta_1 = R_2\theta_2.$$

Prin derivare obținem :

$$R_1\dot{\theta}_1 = R_2\dot{\theta}_2,$$

sau

$$R_1\omega_1 = R_2\omega_2.$$

Ținînd seama și de relația dintre viteza unghiulară și turație ( $\omega = \frac{\pi n}{30}$ ) rezultă.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{R_2}{R_1} = \pm \frac{D_2}{D_1} = \frac{n_1}{n_2} = \pm i. \quad (8.1)$$

Mărimea  $i$  poartă denumirea de *raport de transmitere*; se va lua semnul  $+$  pentru rotația în același sens și semnul  $-$  pentru rotațiile în sensuri contrare.

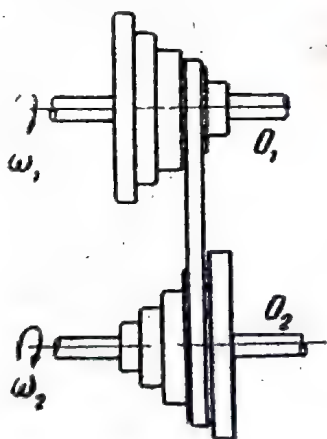


Fig. 8.2.

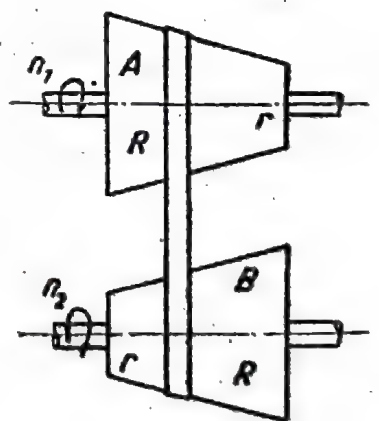


Fig. 8.3.

Pentru a se obține diferite viteze la arborele condus se folosesc schimbători de viteză în trepte (fig. 8.2) constituiți din

două conuri în trepte, identice, plasate invers pe doi arbori în paralel  $O_1$  și  $O_2$  peste care este trecută o curea continuă. Arborului  $O_1$  i se imprimă o rotație constantă în timp ce la arborele condus  $O_2$  se obțin atâtea rotații câte trepte are conul.

În figura 8.3 este arătat un variator continuu de viteze cu ajutorul căruia prin deplasarea curelei, raportul de transmitere poate fi variat între limitele date de relația :

$$\frac{R}{r} \leq i \leq \frac{r}{R} \left( i = \frac{n_1}{n_2} \right). \quad (8.2)$$

## 2. Mecanisme cu roți

În cazul în care cele două axe între care trebuie transmisă mișcarea se află unul în apropierea celuilalt, se întrebuițează o *transmisie prin roți* aflate în contact direct. Axele celor două roți pot avea una dintre pozițiile : paralele, concurente sau oarecare. Transmiterea mișcării de rotație între doi arbori se poate face prin *roți cu fricțiune* sau prin *roți dințate*. Transmisia prin roți dințate se întrebuițează în special atunci când se cere asigurarea unei anumite viteze unghiulare și când se transmit puteri relativi mari (la reductoare, mecanisme planetare etc.).

Elementul conducător are în general o mișcare de rotație uniformă ; elementul condus poate avea fie o mișcare de rotație uniformă (la transmisii prin roți dințate, cilindrice sau conice, roți de fricțiune), fie o mișcare de rotație variată (la transmisii prin angrenaje eliptice sau dreptunghiulare sau la variatorii de viteză), fie o mișcare de rotație intermitentă (la transmisiile prin roți de malta, roți cu clichet etc.).

În general, roțile aflate în contact direct se pot prezenta în două cazuri : *tangente exterioare* și *tangente interioare*.

a) **Transmisii cu roți de fricțiune.** Într-o transmisie prin roți de fricțiune, între roți, în punctul lor de contact, nu au loc deplasări relative. Mișcarea relativă a roților este o rostogolire fără alunecare ; punctele de contact ale celor două roți au aceeași viteză pe fiecare dintre ele.

Pentru ca raportul de transmitere să fie constant, trebuie ca coeficientul de frecare să fie atât de mare încât forța de frecare ce ia naștere la contactul celor două roți să nu permită

alunecarea lor relativă. Pentru aceasta, cele două roți se presează una contra celeilalte cu o anumită forță, iar adeziunea dintre suprafețele celor două roți aflate în contact se mărește folosind pentru una dintre roți (de obicei pentru cea mică) materiale ca : piele, fibră, lemn avînd un coeficient de frecare mare.

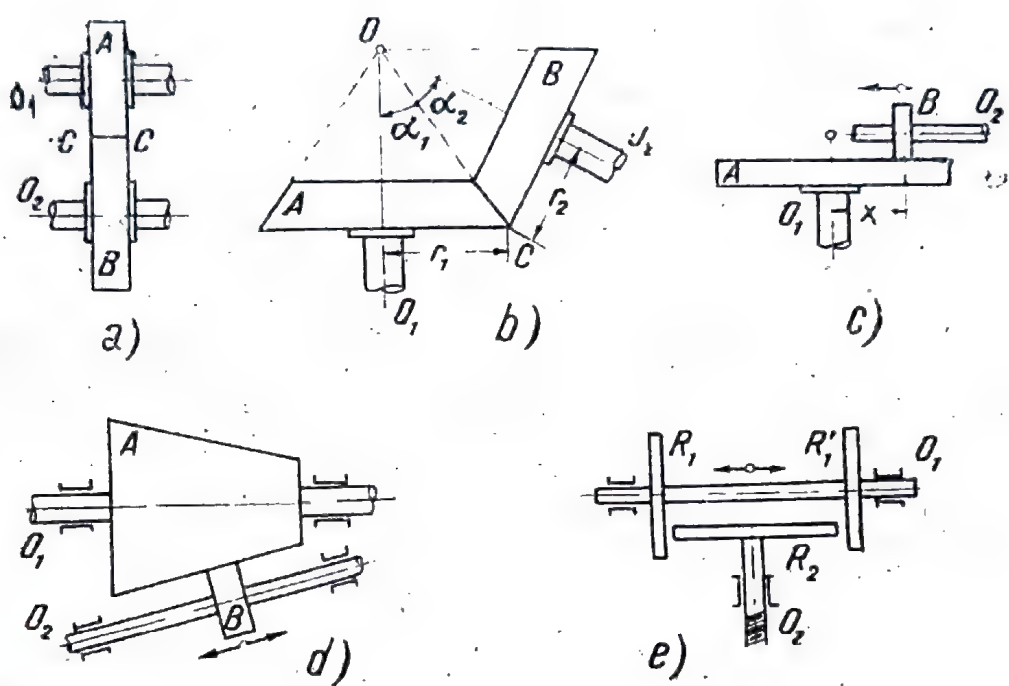


Fig. 8.4.

În figura 8.4 sînt arătate diferite tipuri de roți de fricțiune : cilindrice (a), conice (b), sub formă de tambur (d) ; în figura 8.4, c și d sînt arătați doi variatori de viteză, iar în figura 8.4, e o presă de fricțiune.

În cazul roților cilindrice, exprimînd că viteza punctului de contact este aceeași se obține :

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

( $\omega_1$  și  $\omega_2$  sînt vitezele unghiulare,  $r_1$  și  $r_2$  — razele roților). Notînd prin  $n_1$  și  $n_2$  turațiile celor două roți, se obține :

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1}. \quad (8.3)$$

Raportul de transmitere  $i$  se consideră ca și în cazul transmisiei prin curele cu semn pozitiv sau negativ după cum vitezele unghiulare ale roților au sau nu același sens.



b) **Transmisii cu roți dințate** (angrenaje). În general, se numește *angrenaj* o transmisie compusă din două roți dințate sau dintr-o roată dințată și o cremalieră montate astfel încât dinții unei roți să intre în golurile celeilalte.

Transmisiile prin angrenaje sînt folosite pentru a evita nesiguranța provocată de variația vitezei unghiulare de la transmisiile prin roți cu fricțiune datorită unor factori accidentali care pot provoca lunecări în punctele de contact.

Caracteristicile principale ale unei roți dințate sînt (fig. 8.5, a) :

*Cercul primitiv*, care reprezintă secțiunea roții primitive ; după STAS 915—50 se numesc roți primitive limitele către care tind roțile unui angrenaj, al cărui număr de dinți crește către infinit, în timp ce înălțimea lor se micșorează tinzînd către zero.

*Pasul* roții dințate este distanța  $p$  dintre profilele de același sens a doi dinți consecutivi, măsurată pe cercul primitiv (fig. 8.5, a).

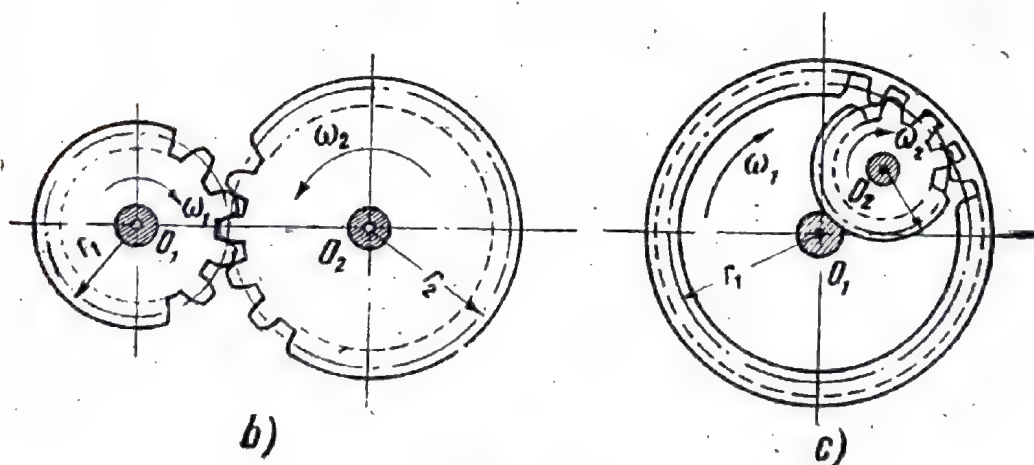
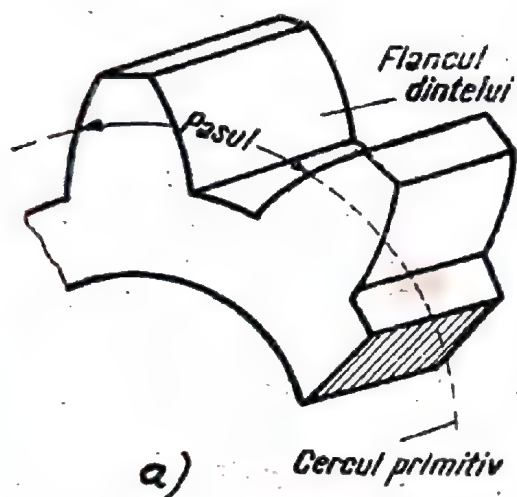


Fig. 8.5.

**Modulul** roții dințate este lungimea care revine pe diametrul cercului primitiv pentru un dinte al roții :

$$m = \frac{d}{z}, \quad (8.4)$$

unde  $z$  este numărul dinților, iar  $d$  diametrul primitiv. Pasul roții se exprimă ca funcție de modul prin relația :

$$p = \frac{\pi d}{z} = \pi m. \quad (8.5)$$

Pentru ca două roți dințate se poate fi angrenate, ele trebuie să aibă același modul și același profil al dinților.

c) **Angrenajele cilindrice** sînt angrenajele formate din două roți dințate, avînd dinții dispuși pe periferiile a doi cilindri în lungul generatoarelor lor. Aceste angrenaje au axe paralele. În figura 8.5 se arată două angrenaje cilindrice : b) exterior c) interior.

Raportul de transmitere se obține pe aceleași considerente ca mai sus ; el are expresia :

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}, \quad (8.6)$$

limitele între care poate varia fiind  $\frac{1}{10}$  și 10.

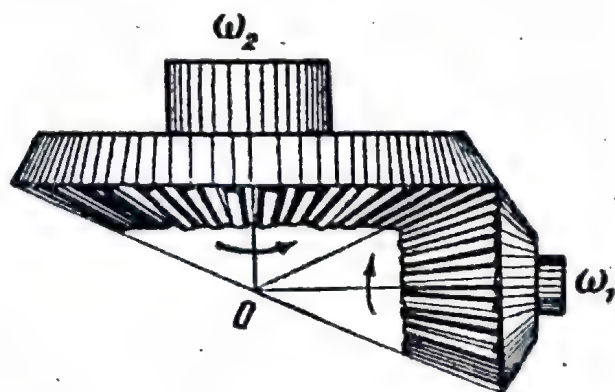


Fig. 8.6.

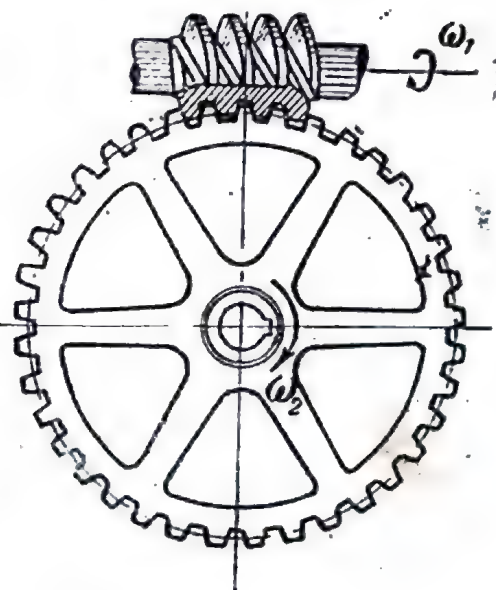


Fig. 8.7.

d) **Angrenajele conice** (fig. 8.6) se folosesc pentru a transmite mișcarea de la un arbore la altul concurent cu primul pentru ca angrenajul conic să funcționeze trebuie ca vîrfurile celor două conuri din care fac parte roțile dințate să coincidă.

Raportul de transmitere are aceeași valoare ca și în cazul angrenajelor cilindrice (8.6).

e) **Angrenajul cu mele** (angrenajul melc — roată melcată), cunoscut și sub denumirea de *angrenaj cu șurub fără sfîrșit*, este folosit în cazul cînd cei doi arbori sînt perpendiculari. Melcul este un șurub, iar roata melcată este o roată dințată care angrenează cu melcul. Dinții roții melcate sînt înclinați față de generatoarele suprafeței cilindrice inițiale a roții. Pentru ca funcționarea să fie posibilă, trebuie ca pasul melcului să fie egal cu pasul danturii roții (fig. 8.7).

Pentru determinarea raportului de transmitere procedăm astfel: presupunem că roata melcată are  $z$  dinți; în timp ce melcul se rotește complet o dată, adică efectuează  $\theta_1 = 2\pi$  radiani, roata melcată se rotește cu un pas, adică cu  $\theta_2 = 2\pi/z$  radiani; rezultă:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = z,$$

care prin derivare conduce la:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_1}{r_2} = z. \quad (8.7)$$

Dacă melcul are un număr  $q$  de începuturi, atunci raportul de transmitere este:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z}{q}. \quad (8.8)$$

Mecanismul funcționează ca reductor de turație; el nu este reversibil, transmiterea mișcării de la roată la șurub fiind împiedicată de autofrînare.

f) **Angrenajele cu roată dințată și cremalieră** (fig. 8.8) se compun dintr-o roată dințată cilindrică angrenată cu o bară dreaptă dințată și servesc la transformarea unei mișcări de rotație într-o mișcare de translație, și viceversa. Angrenajele cu roată dințată și cremalieră se întrebuintează la mașin-unelte, cricuri etc.



Dacă se notează cu  $v$  viteza de translație a cremalierei și cu  $\omega$  viteza unghiulară de rotație a roții dințate, pe baza egalității vitezelor în punctul de contact se poate scrie :

$$v = R\omega. \quad (8.9)$$

g) **Trenuri cu roți dințate.** Pentru transmiterea mișcării între axe paralele situate la o distanță mai mare, se folosesc trenuri (serii) de roți dințate (fig. 8.9), la care între roata conducătoare  $a$  și roata condusă  $d$  se introduc o serie de roți intermediare.

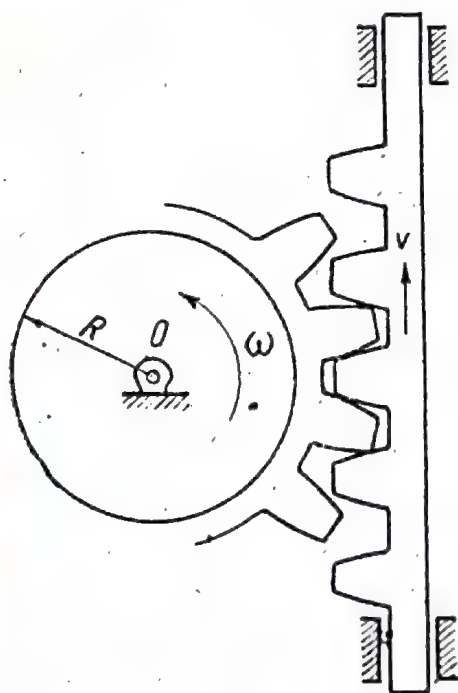


Fig. 8.8.

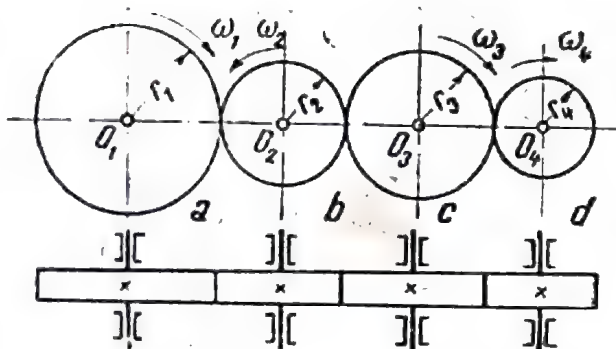


Fig. 8.9.

Raportul de transmitere se determină din aproape în aproape considerând angrenajele parțiale formate din roțile  $a-b$ ,  $b-c$ ,  $c-d$ ; notînd cu  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  rapoartele de transmitere parțiale, avem :

$$i_1 = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad i_2 = \frac{n_2}{n_3} = \frac{z_3}{z_2}, \quad i_3 = \frac{n_3}{n_4} = \frac{z_4}{z_3},$$

de unde, prin înmulțire obținem :

$$i = i_1 i_2 i_3 = \frac{n_1}{n_4} = \frac{z_4}{z_1}. \quad (8.10)$$

Se observă că raportul de transmitere nu depinde de numărul de dinți ai roților intermediare, ci are aceeași valoare ca și cînd roțile extreme  $a$  și  $d$  ar fi angrenate direct.

În figura 8.10 este arătat un angrenaj care este folosit într-un reductor de turație; cele două roți de pe axul 2 și cele două roți de pe axul 3 sînt asamblate împreună. Rapoartele de transmitere sînt:

$$i_1 = \frac{n_1}{n_2} = \frac{R_2}{r_1}, \quad i_2 = \frac{n_2}{n_3} = \frac{R_3}{r_2}, \quad i_3 = \frac{n_3}{n_4} = \frac{R_4}{r_3}.$$

Raportul de transmitere total este:

$$i = i_1 i_2 i_3 = \frac{n_1}{n_4} = \frac{R_2 R_3 R_4}{r_1 r_2 r_3}. \quad (8.11)$$

h) Transmisile cu roți dințate elicoidale (fig. 8.11) servesc la transmiterea mișcării de rotație a doi arbori ale căror axe

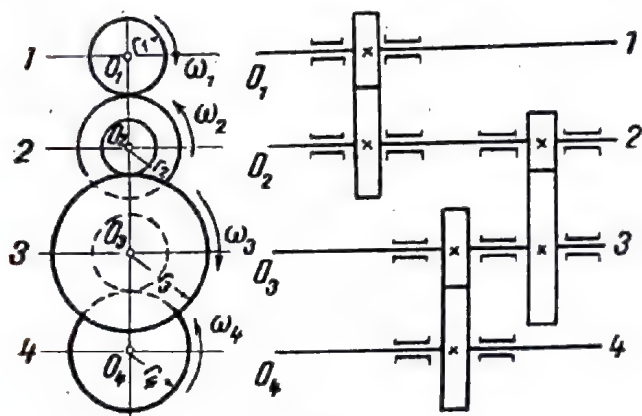


Fig. 8.10.

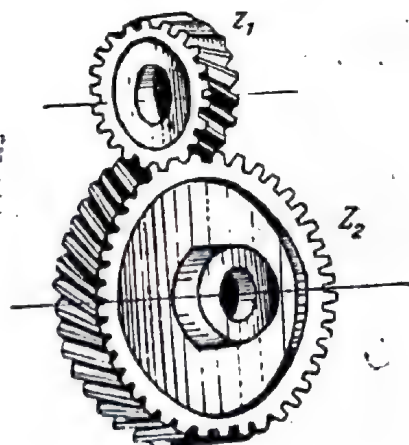


Fig. 8.11.

sînt oarecum în spațiu (de obicei perpendiculare) și la care nu se cere un raport prea mic de transmisie.

Roțile cu dinți elicoidali se prezintă sub forma unor porțiuni de șurub avînd mai multe filete care se angrenează; numărul filetelor corespunde cu numărul dinților unei roți dințate obișnuite. Dacă roata conducătoare are  $z_1$  filete, iar cea condusă  $z_2$  filete, raportul de transmitere va fi:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Pentru ca o asemenea transmisie să poată funcționa, este necesar ca lățimea golurilor și grosimea filetelor măsurate pe perpendiculara la axa șurubului să fie egale la ambele roți. Suma lățimii unui gol cu grosimea filetelui formează așa-zisul

*pas normal* al roții elicoidale, pe care nu trebuie să-l confundăm cu *pasul aparent* măsurat la periferia elicei; diferența dintre ele este arătată pe figura 8.12. La roțile dințate cu dinți drepecți, pasul normal și cel aparent coincid.

Avantajul cel mai mare al transmisiei cu roți dințate elicoidale, ca de altfel și în cazul transmisiei cu melc roată melcată, constă în aceea că ea funcționează foarte lin, fără smucituri. Dezavantajul acestei transmisii, ca de altfel al tuturor transmisiilor cu șurub, constă în aceea că în timpul mișcării cele două suprafețe de contact ale dinților alunecă una pe cealaltă, fapt pentru care din cauza frecării aceste transmisii se încălzesc în timpul funcționării; din acest motiv, trebuie dată o atenție deosebită răcirii transmisiei în timpul funcționării sale.

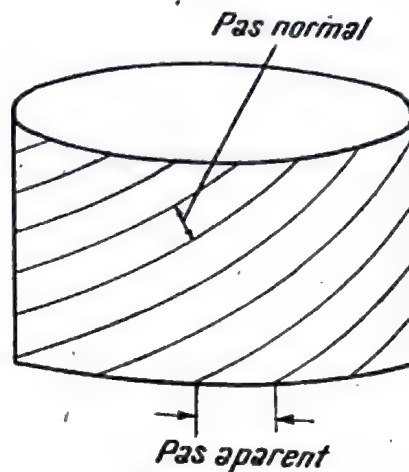


Fig. 8.12.

### 3. Aplicații

a) În figura 8.13 este desenată schematic transmisia de la pinionul conic până la carcasa diferențialului autocamionului SR 101 fabricat în R.P.R., la uzinele „Steagul roșu” din Brașov. Se cere să se calculeze raportul de transmitere al acestui angrenaj.

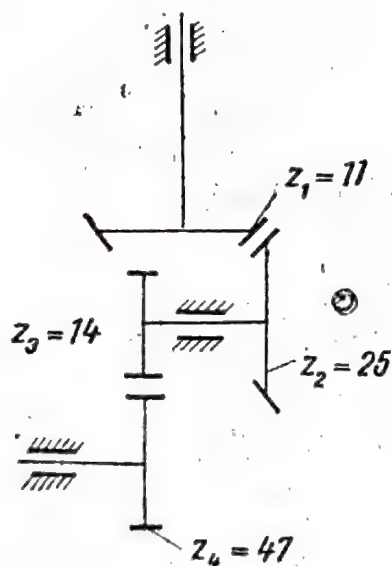


Fig. 8.13.

#### Rezolvare

După formula (8.1) avem :

$$i = \frac{z_4}{z_3} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{47}{14} \times \frac{25}{11} = 7,6.$$

b) În figura 8.14 este reprezentată schematic (fig. 8.14, a) cutia de viteze a tractorului KD 35 fabricat în R.P.R., la uzinele „Uzinele de tractoare—Brașov” împreună cu schema de cuplare



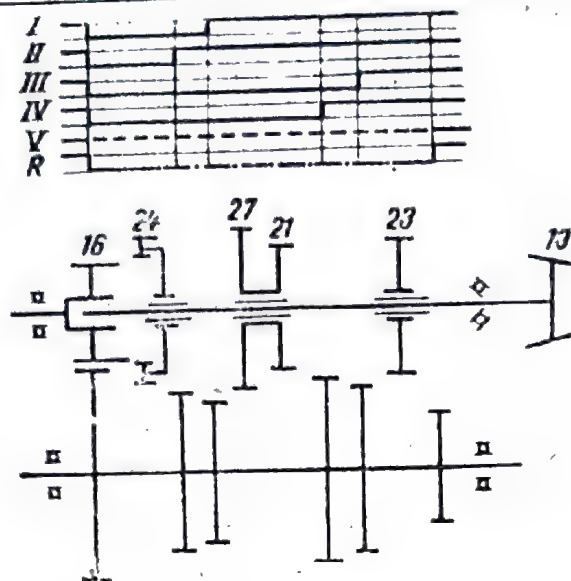


Fig. 8.14, a

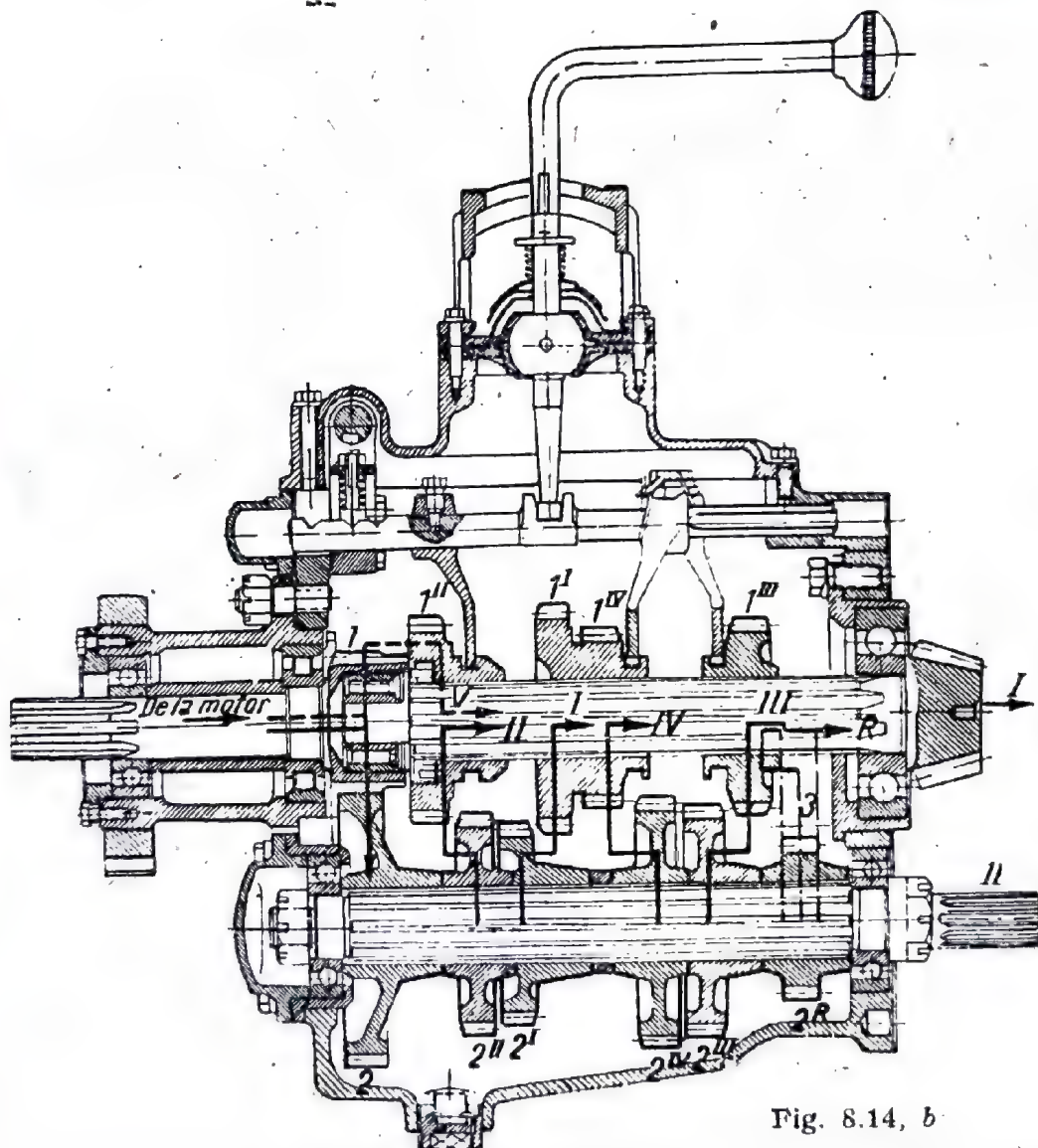


Fig. 8.14, b

a vitezelor (fig. 8.14, b). Cu ajutorul acestei cutii de viteze se realizează cinci viteze înainte și una înapoi, conform schemei de cuplare.

Se cere să se determine rapoartele de transmitere pentru toate cele șase viteze realizate.

### Rezolvare

Folosind schema din figura 8.14 și formula (8.1) obținem :

$$i_I = \frac{z_1^I}{z_2^I} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{27}{24} \cdot \frac{34}{16} = 2,39,$$

$$i_{II} = \frac{z_1^{II}}{z_2^{II}} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{24}{26} \cdot \frac{34}{16} = 1,96,$$

$$i_{III} = \frac{z_1^{III}}{z_2^{III}} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{23}{28} \cdot \frac{34}{16} = 1,74,$$

$$i_{IV} = \frac{z_1^{IV}}{z_2^{IV}} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{21}{30} \cdot \frac{34}{16} = 1,48,$$

$$i_V = 1,$$

$$i_R = \frac{z_1^{III}}{z_1^V} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{23}{24} \cdot \frac{34}{16} = 2,44.$$

## Partea a IV-a

### DINAMICA SISTEMELOR MATERIALE

#### Capitolul IX

#### PROBLEMELE GENERALE; NOȚIUNI INTRODUCTIVE IN DINAMICĂ

##### 1. Obiectul dinamicii

Dinamica este acea parte a mecanicii care studiază mișcarea mecanică a corpurilor solide în legătură cu forțele care acționează asupra acestora.

Problemele dinamicii se împarte în trei categorii, și anume :  
*probleme directe* sînt acele probleme în care se cunosc toate forțele exterioare care acționează corpul, caracteristicile mecanice și geometrice ale acestuia, precum și poziția și starea sa de mișcare la un moment dat (condițiile inițiale) și se cere să se determine mișcarea corpului sub acțiunea forțelor date ;

*probleme inverse* sînt acele probleme în care este cunoscută mișcarea corpului, caracteristicile mecanice și geometrice ale acestuia și se cer forțele exterioare, care, aplicate solidului, îi provoacă mișcarea dată ;

*probleme mixte* sînt acele probleme în care se cunosc o parte din forțele care acționează corpul, o parte din caracteristicile mișcării acestuia (elementele de pînă aci sînt determinate de regulă de legăturile solidului, sau sînt impuse), caracteristicile geometrice și mecanice ale corpului, poziția și starea sa de mișcare la un moment dat (condițiile inițiale) și se cere să se determine restul forțelor care acționează corpul și restul caracteristicilor mișcării sale. Acestea din urmă se întîlnesc cel mai adesea în aplicații.



## 2. Subîmpărţirile dinamicii ; scurt istorie

În prima parte a dinamicii sînt studiate o serie de noţiuni care formează baza prezentării dinamicii corpurilor ; în continuare se expun metodele generale de rezolvare a problemelor de dinamică, indiferent dacă în aceste probleme apar puncte materiale, corpuri solide rigide sau sisteme de corpuri solide rigide ; aceste metode sînt aplicate apoi la studiul dinamicii acelor corpuri ale căror mişcări au fost studiate în cadrul cinematicii. Studiul dinamicii se încheie cu o serie de aplicaţii în tehnică.

Bazele dinamicii au fost puse de Galileo Galilei şi Isaac Newton ; Lagrange este cel care le-a dat o formă analitică, exprimînd partea teoretică aproape sub forma pe care o cunoaştem astăzi.

La dezvoltarea dinamicii şi-au adus contribuţia şi o serie de alţi savanţi dintre care cităm pe N. E. Jukovski, V. I. Meşcerski şi alţii.

## 3. Importanţa tehnică a dinamicii

Metodele de studiu ale mişcării şi de determinare a reacţiunilor dinamice au aplicaţii în toate disciplinele care se ocupă cu studiul şi proiectarea organelor mobile ale diferitelor maşini şi instalaţii ; astfel, cu ajutorul metodelor dinamicii se studiază mişcarea şi se dimensionează organele motoarelor, compresoarelor, maşinilor-unelte etc. Alte probleme privind reglajul maşinilor, echilibrarea maselor aflate în mişcare, probleme de mare importanţă în tehnica modernă, nu pot fi tratate decît cu ajutorul metodelor dinamicii.

## 4. Lucru mecanic

Să observăm diferite activităţi fizice efectuate de om ; un muncitor care sapă întrebunţează forţa sa musculară pentru a înfige sapa în pămînt, producînd mişcarea sapei şi învingînd o dată cu aceasta forţa rezistentă a pămîntului ; un muncitor care lucrează la ridicarea unei construcţii întrebunţează forţa sa musculară pentru a putea duce materialele necesare dintr-un loc într-altul, învingînd forţa care se opune acestei mişcări (greutatea materialului împreună cu propria sa greutate).

Fenomenele acestea pot fi observate nu numai în activitatea omului, ci chiar în modul în care o mașină-unealtă prelucreează (așchiază) metalul pe care-l va transforma într-o piesă a unei mașini : forța care pune în mișcare scula așchietoare este folosită spre a învinge forța rezistentă care ia naștere din cauza deformării metalului ce trebuie prelucrat.

Din examinarea acestor exemple precum și a multor altora care se întâlnesc în activitatea zilnică, observăm că în timpul efectuării unei activități mecanice de felul celor examinate mai sus iau naștere două forțe : o forță care produce mișcarea, denumită *forță motoare*, și o forță care se opune mișcării, denumită *forță rezistentă*. În timpul mișcării, atât forța motoare cât și forța rezistentă își deplasează punctul de aplicație, putînd varia ca mărime sau chiar ca direcție. O noțiune caracteristică a acestui proces este noțiunea de *lucru mecanic* ; ea reunește atât lungimea drumului parcurs de cele două forțe (motoare și rezistentă) cât și caracteristicile acestor forțe.

Noțiunea de lucru mecanic a rezultat din necesitatea omului de a măsura într-un anumit mod activitatea depusă de el sau de mașinile-unelte care-l ajutau în activitatea sa ; astfel, omul a constatat că rezultatul acestei munci depinde atât de efortul depus cât și de drumul parcurs de efort, fiind în cele mai simple cazuri proporțional cu produsul dintre efort și deplasarea acestui efort, la fel cum momentul unei forțe în raport cu un punct este proporțional cu produsul dintre forță și distanța de la punct la suportul forței.

a) **Lucru mecanic elementar.** Să considerăm o forță  $F$  care-și deplasează punctul de aplicație de-a lungul unei curbe oarecare  $(C)$  ; în timpul acestei deplasări, forța își poate schimba, de la o poziție la alta a punctului său de aplicație, atât modulul cât și orientarea (fig. 9.1, *a* și *b*). Să presupunem că în intervalul de timp de la  $t$  la  $t + \Delta t$  punctul de aplicație al forței  $F$  parcurge arcul de curbă de lungime  $\Delta s$  pe curba  $(C)$ . Unghiul dintre acest arc de curbă, pe care îl vom înlocui în mod aproximativ cu coarda  $MM_1$ , și direcția forței  $F$  este  $\alpha$  ; prin definiție, vom numi lucrul mecanic elementar al forței  $\vec{F}$  pentru parcurgerea arcului  $\Delta s$  expresia :

$$\Delta L = F \Delta s \cos \alpha. \quad (9.1)$$

Această formulă ne arată că lucrul mecanic elementar poate fi considerat ca produsul dintre deplasarea elementară și proiecția forței pe această deplasare sau ca produsul dintre forță și proiecția deplasării pe direcția forței.



Lucrul mecanic este o mărime scalară, care poate fi pozitivă, negativă sau nulă după cum unghiul  $\alpha$  este ascuțit, obtuz sau drept.

Lucrul mecanic este nul cînd forța sau deplasarea sînt nule sau în cazul cînd forța și deplasarea sînt perpendiculare.

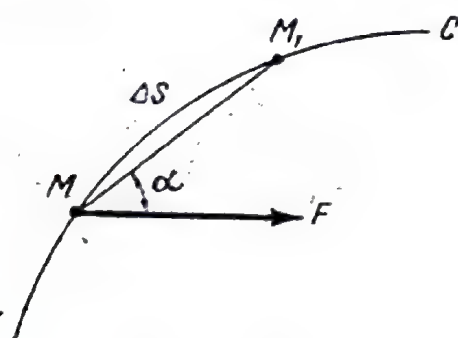


Fig. 9.1, a

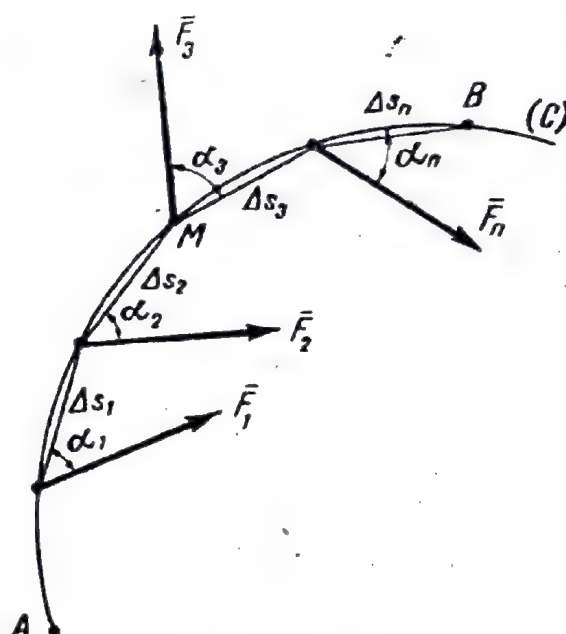


Fig. 9.1, b

Lucrul mecanic pozitiv este denumit *lucru mecanic motor* ( $L_m$ ); el pune în mișcare un mecanism sau o mașină.

Lucrul mecanic negativ este denumit *lucru mecanic rezistent* ( $L_r$ ), pentru efectuarea căruia trebuie să se consume o energie exterioară.

Lucrul mecanic se măsoară în ergi în sistemul CGS și în kilograme-forță-metri în sistemul MKfS, respectiv în jouli în sistemul MKS (v. și tabela 14.2).

În mod analog se definește ca fiind lucrul mecanic elementar al unui cuplu expresia :

$$\Delta L = M \Delta \theta, \quad (9.2)$$

în care  $M$  este momentul cuplului, iar  $\Delta \theta$  unghiul infinit mic cu care se rotește cuplul în planul său.

b) **Lucru mecanic total.** Dacă forța  $F$  se deplasează între două poziții  $A$  și  $B$  aflate la distanță finită una de alta pe curba  $(C)$ , lucrul mecanic efectuat de forța  $\bar{F}$  se află însumînd lucrurile mecanice elementare corespunzătoare (fig. 9.1, b) :

$$L = F_1 \Delta s_1 \cos \alpha_1 + F_2 \Delta s_2 \cos \alpha_2 + \dots + F_n \Delta s_n \cos \alpha_n. \quad (9.3)$$



$F_1, F_2, \dots, F_n$  fiind modulele forței  $\vec{F}$ , care își poate schimba în timpul deplasării sale atât mărimea cât și orientarea.

În mod analog pentru un cuplu avem :

$$L = M_1 \Delta \theta_1 + M_2 \Delta \theta_2 + \dots + M_n \Delta \theta_n \quad (9.4)$$

Din formula (9.3) rezultă că, în general, lucrul mecanic total al unei forțe depinde atât de forma traiectoriei cât și de modul în care variază forța în timpul parcurgerii ei. Pentru

cazurile particulare întâlnite în practică, formula (9.1) capătă o formă simplă, cum se va vedea mai jos.

c) Cazuri particulare în expresia lucrului mecanic total. În general, în aplicații se întâlnește frecvent cazul forței  $\vec{F}$  constante în mărime, direcție și sens, iar drumul parcurs de originea sa este o curbă

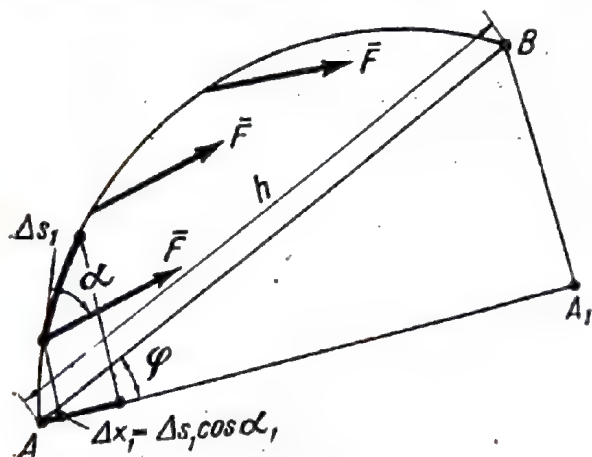


Fig. 9.2.

oarecare, în particular o dreaptă. În acest caz, se poate arăta că lucrul mecanic total între pozițiile A și B este egal cu produsul dintre modulul forței  $\vec{F}$  și proiecția segmentului  $AB = h$  pe direcția forței. Într-adevăr, în acest caz putem scrie (fig. 9.2) :

$$L = F (\Delta s_1 \cos \alpha_1 + \Delta s_2 \cos \alpha_2 + \dots + \Delta s_n \cos \alpha_n),$$

deoarece forța  $\vec{F}$  rămâne constantă. Dar :

$$\Delta s_1 \cos \alpha_1 = \Delta x_1, \Delta s_2 \cos \alpha_2 = \Delta x_2, \dots, \Delta s_n \cos \alpha_n = \Delta x_n,$$

$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  fiind segmente ale liniei  $AA_1$  paralele cu direcția fixă a forței  $F$ .

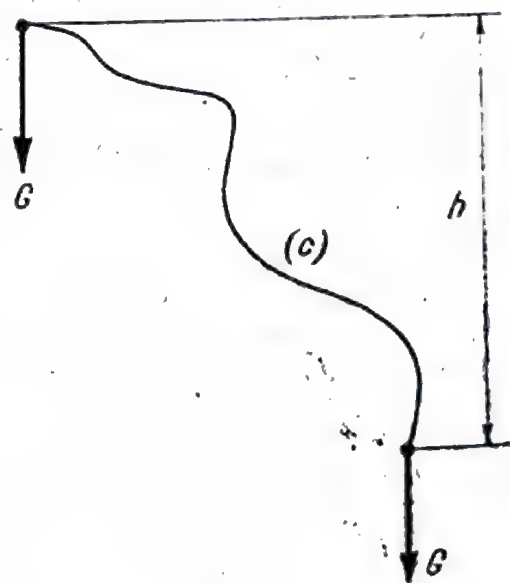


Fig. 9.3.

Înlocuind rezultă :

$$L = F(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = \pm F A A_1 = \pm F h \cos \varphi, \quad (9.5)$$

semnul plus corespunzând unghiul  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , iar semnul minus unghiului  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$  ( $\varphi$  este unghiul dintre dreapta  $AB$  și dreapta  $AA_1$  paralelă cu direcția forței  $\vec{F}$ , unde  $BA_1 \perp AA_1$ ).

Rezultatul obținut este independent de forma curbei  $C$ . În particular, dacă  $AB$  este paralelă cu  $F$  avem  $\varphi=0$  și deci

$$L = \pm Fh. \quad (9.6)$$

Un asemenea caz întâlnim la calculul lucrului mecanic al gravitației, unde orice drum ar parcurge punctul său de aplicație, avem întotdeauna (fig. 9.3) :

$$L = \pm Gh, \quad (9.7)$$

după cum parcurgerea se face de sus în jos (+) sau de jos în sus (—).

Dacă curba  $C$  este o dreaptă (fig. 9.4), avem :

$$L = F \cdot A A_1 = Fh \cos \varphi. \quad (9.8)$$

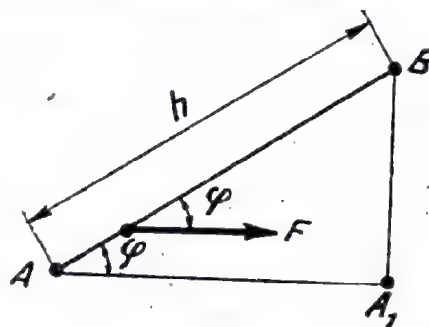


Fig. 9.4.

## 5. Putere mecanică

Cu timpul, noțiunea de lucru mecanic s-a dovedit a nu fi în măsură să caracterizeze capacitatea mașinilor de a efectua o anumită activitate, deoarece nu ne este indiferent în ce interval de timp se efectuează un anumit lucru mecanic. Trebuia creată o mărime care să deosebească între ele două mașini care produc același lucru mecanic în intervale de timp deosebite; această mărime este *puterea*.

Vom înțelege prin puterea mecanică dezvoltată de o forță  $\vec{F}$  raportul dintre lucrul mecanic elementar  $\Delta L$  și timpul  $\Delta t$  în care acesta a fost efectuat :

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad (9.9)$$

Dacă ținem seama de formula (9.1), puterea  $P$  se mai poate scrie :

$$P = \frac{F v \Delta t \cos \alpha}{\Delta t} = F v \cos \alpha, \quad (9.10)$$

$v$  fiind viteza originii forței  $F$ .

Dacă forța  $\vec{F}$  și viteza  $\vec{v}$  au aceeași direcție și același sens, atunci  $\alpha = 0$  și :

$$P = Fv,$$

ar dacă au sensuri contrare,  $\alpha = 180^\circ$  și

$$P = -Fv.$$

În mod analog puterea unui cuplu are expresia :

$$P = M\omega, \quad (9.11)$$

$\omega$  fiind viteza unghiulară de rotație a planului cuplului.

Puterea este o mărime scalară pozitivă, negativă sau nulă ; unitatea de măsură a puterii în sistemul CGS este ergul pe secundă (erg/s), în MKSA jouleul pe secundă sau wattul ( $1 \text{ J/s} = 1 \text{ W}$ ). În practică se folosește kilowattul ( $1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$ ). Unitatea de putere în sistemul MKfS este kilogramul-forță-metru pe secundă ( $\text{kgf} \cdot \text{m/s}$ ) ; în practică se folosește și calul-putere ( $1 \text{ CP} = 75 \text{ kgm/s}$ ). Între unitățile practice avem relațiile  $1 \text{ CP} = 0,736 \text{ kW}$ ,  $1 = 1,36 \text{ CP}$ .

Noțiunea de putere are largi aplicații în tehnică ; ea constituie o caracteristică de bază a tuturor agregatelor energetice, a instalațiilor producătoare de forță, a mașinilor etc.

## 6. Randament mecanic

a) **Randamentul mecanic al unei mașini.** În timpul funcționării unei mașini, forța motoare sau cuplul motor produce lucrul mecanic motor  $L_m$ , care reprezintă lucrul mecanic cheltuit pentru funcționarea mașinii în scopul în care ea a fost creată (mașină-unealtă, motor de tracțiune etc.). În același timp, forțele și cuplurile rezistente produc un lucru mecanic rezistent  $L_r$ . Aceste două lucruri mecanice se pot afla unul față de celălalt în următoarele trei situații.

— Lucrul mecanic motor este mai mare decât lucrul mecanic rezistent ( $L_m > L_r$ ) ; acest fapt se întâmplă atunci când forțele



și cuplurile motoare sînt mai mari decît forțele și cuplurile rezistente. În această situație, vitezele tuturor organelor mobile ale mașinii cresc, mașina se ambalează. Această situație nu poate dura prea mult timp, deoarece vitezele crescînd mereu există pericolul distrugerii mașinii respective. În mod practic, ea se produce la pornirea unei mașini.

— Lucrul mecanic motor este egal cu lucrul mecanic rezistent ( $L_m = L_r$ ); acest fapt se întîmplă atunci cînd forțele și cuplurile motoare echilibrează forțele și cuplurile rezistente. În această situație, vitezele tuturor organelor mobile ale mașinii sînt constante în modul (dacă nu vitezele momentane, cel puțin vitezele medii). În mod practic, ea se produce la mersul de regim al unei mașini.

— Lucrul mecanic motor este mai mic decît lucrul mecanic rezistent ( $L_m < L_r$ ); acest fapt se întîmplă atunci cînd forțele și cuplurile motoare sînt mai mici decît forțele și cuplurile rezistente. În această situație, vitezele tuturor organelor mobile ale mașinii scad; dacă ea durează mai mult, mașina respectivă se oprește. În mod practic, această situație survine la oprirea oricărei mașini.

Un raționament analog se putea face cu ajutorul puterilor.

Să analizăm mai îndeaproape lucrul mecanic rezistent  $L_r$ . Acesta se compune întotdeauna dintr-o sumă de doi termeni: unul  $L_u$  reprezintă lucrul mecanic util, care este lucrul mecanic realizat de mașină pentru scopul în care ea a fost construită (strunjirea unei piese la un strung, ridicarea unei greutăți la un ascensor etc.). Dar o dată cu funcționarea mașinii apar și alte forțe, cum ar fi spre exemplu forțele de frecare, pentru învingerea cărora trebuie cheltuit un lucru mecanic ce nu participă direct la realizarea scopului pentru care a fost construită mașina. Lucrul mecanic consumat într-o mașină pentru învingerea forțelor de frecare și în general a tuturor rezistențelor pasive este denumit lucrul mecanic pierdut  $L_p$ ; el constituie cel de-a doilea termen al lucrului mecanic rezistent. Avem deci:

$$L_r = L_u + L_p.$$

O mașină este evident cu atît mai bine realizată cu cît  $L_p$  este mai mic.

În cazul funcționării de regim a unei mașini avem, după cum am văzut:

$$L_m = L_r = L_u + L_p. \quad (9.12)$$

Din formula (9.12) rezultă că, la regim, întreg lucrul mecanic motor se consumă în lucru mecanic rezistent ; mașina apare astfel ca un transformator de lucru mecanic.

O noțiune importantă care caracterizează orice mașină este noțiunea de *randament* ; ea se definește ca raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic motor ;

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} .$$

Randamentul mecanic (gradul de folosință) al unei mașini caracterizează eficacitatea modului său de funcționare.

Dacă se ține seama de formula (9.12), randamentul mecanic se scrie și sub o altă formă, și anume :

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} = \frac{L_m - L_p}{L_m} = 1 - \frac{L_p}{L_m} . \quad (9.13)$$

Raportul  $\frac{L_p}{L_m}$  poartă denumirea de *coeficient de pierderi* în mașină.

După cum rezultă din formula (9.13), randamentul este o mărime pozitivă subunitară. Cu cât randamentul este mai mare, adică mai apropiat de unitate, cu atât mașina este mai bună, adică are pierderi mai puține și lucrul mecanic util se apropie mai mult de lucrul mecanic motor ; randamentul este deci un coeficient care arată calitatea mașinii ; iată câteva valori curențele randamentului la mașini :

— mașini electrice . . . . .	0,85	. . . . .	0,95
— mașini hidraulice . . . . .	0,60	. . . . .	0,80
— motoare Diesel . . . . .	0,25	. . . . .	0,30
— mașini cu abur . . . . .	0,10	. . . . .	0,15

Trebuie observat că randamentul unei mașini nu are sens decât pentru mișcarea de regim ; el nu se calculează pentru perioada de pornire sau de oprire a mașinii.

b) **Randamentul total al unui agregat de mașini, legate în serie.** Să considerăm un număr oarecare de mașini legate în serie ; caracteristica unui asemenea lanț de mașini constă în aceea că lucrul util al unei mașini din lanț devine lucru motor pentru mașina următoare. Avem :

— randamentul fiecărei mașini :

$$\eta_1 = \frac{L_{u_1}}{L_{m_1}} , \eta_2 = \frac{L_{u_2}}{L_{m_2}} , \dots , \eta_n = \frac{L_{u_n}}{L_{m_n}} , \quad (9.14)$$



— randamentul lanțului de mașini :

$$\eta = \frac{L_{u_n}}{L_{m_n}} \quad (9.15)$$

Efectuînd produsele randamentelor și ținînd seama că  $L_{m_2} = L_{u_1}$ ,  $L_{m_3} = L_{u_2}$ , ..... obținem :

$$\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots \eta_n = \frac{L_{u_1}}{L_{m_1}} \cdot \frac{L_{u_2}}{L_{m_2}} \cdot \frac{L_{u_3}}{L_{m_3}} \dots \frac{L_{u_n}}{L_{m_n}} = \eta \quad (9.16)$$

Rezultă că *randamentul total al unui lanț de mașini în serie este egal cu produsul randamentelor mașinilor lanțului*. Acest caz survine de multe ori în practică; un exemplu în acest sens îl constituie un agregat format dintr-un motor electric, un reductor și o mașină pentru încercări de rezistență la întindere a firelor din industria textilă; randamentul total al unui asemenea agregat se obține ca produsul randamentelor motorului, reductorului și mașinii de încercat.

**O b s e r v a Ț i e.** Cifrele de mai sus reprezintă randamentele întregii mașini (nu numai randamentul mecanic).

## 7. Momente de inerție

Să considerăm două roți de aceeași greutate, dar care sînt construite în mod diferit : prima dintre ele este plină, iar cealaltă este goală în apropierea butucului, materialul din care este construită fiind repartizat mai mult la periferia roții. Să punem aceste două roți să se miște în translație, trase de un fir cu aceeași forță  $F$  pe un plan orizontal, perfect lucios. În baza legii a doua a dinamicii, cele două roți vor căpăta aceeași accelerație :

$$a = \frac{F}{M} \quad (9.17)$$

( $M$  — masa roților), deoarece  $F$  și  $M$  au aceeași valoare pentru ambele roți.

Să montăm acum aceste două roți pe cîte un ax și să căutăm să le punem, în mișcare aplicînd fiecareia cîte un cuplu  $M$ , avînd aceeași valoare. Deși cele două roți au aceeași masă și li se aplică același cuplu, totuși ele vor căpăta accelerații unghiulare diferite,



adică vor ajunge la aceeași viteză în timpuri diferite, și anume cea plină va căpăta o accelerație mai mare, iar cea goală va căpăta o accelerație mai mică. Acest fapt se explică prin aceea că factorul care influențează mișcarea de translație a roților este masa  $M$ , pe când factorul care influențează mișcarea de rotație nu mai este masa roții, ci o altă mărime, care ține seama atât de masa corpului respectiv cât și de repartitia ei în spațiu; această mărime se numește *moment de inerție*. La studiul mișcării de rotație a solidului rigid în jurul unei axe fixe vom vedea că accelerația unghiulară  $\varepsilon$  a solidului căruia i se aplică un cuplu  $\mathcal{M}$  este dată de o relație asemănătoare formulei (9.17), și anume:

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{M}}{J}, \quad (9.18)$$

în care locul masei  $M$  l-a luat momentul de inerție  $J$  al corpului respectiv. El apare în toate mărimile caracteristice ale dinamicii solidului aflat în mișcare de rotație, ca: energia sa cinetică, momentul cinetic etc.

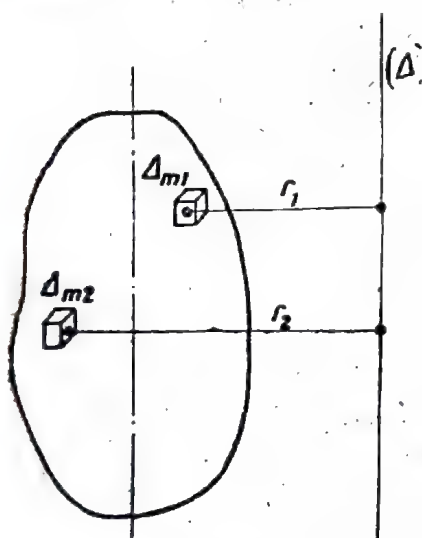


Fig. 9.5.

a) **Momentul de inerție al unui corp solid.** Pentru definirea momentului de inerție al unui corp în raport cu o axă, să considerăm un solid rigid și o axă  $\Delta$  care-l străbate sau nu. Dacă împărțim corpul nostru în porțiuni foarte mici avînd masa  $\Delta m_i$  (spre exemplu paralelipipede foarte mici) și notăm prin  $r_i$  distanțele acestor porțiuni pînă la axa  $\Delta$ , vom denumi drept moment de inerție al solidului față de axa  $\Delta$  expresia (fig. 9.5):

$$J_{\Delta} = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_n r_n^2, \quad (9.19)$$

$n$  fiind numărul total de părți în care a fost împărțit solidul. Această expresie are valoarea cu atît mai exactă cu cît numărul de porțiuni în care a fost împărțit solidul este mai mare.

b) **Formula lui Steiner.** O relație importantă pentru aplicațiile practice este aceea care arată modul în care se calculează momentul de inerție al unui corp față de o axă care s-a deplasat paralel cu aceea în raport cu care o fost calculat inițial. Să

presupunem că am calculat momentul de inerție al unui corp în raport cu o axă  $\Delta_*$  trecînd prin centrul de greutate al corpului, prin aplicarea formulei (9.19). Să considerăm acum o altă axă  $\Delta$  paralelă cu axa  $\Delta_*$ , la distanța  $d$ , și să calculăm momentul de inerție față de noua axă. Aplicînd formula (9.19) în care distanțele  $r$  au devenit acum  $r + d$ , obținem (fig. 9.6) :

$$\begin{aligned} I_{\Delta} &= \Delta m_1 (r_1 + d)^2 + \Delta m_2 (r_2 + d)^2 + \dots + \Delta m_n (r_n + d)^2 = \\ &= \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_n r_n^2 + d^2 (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \\ &\quad + \Delta m_n) + 2d (\Delta m_1 r_1 + \Delta m_2 r_2 + \dots + \Delta m_n r_n) \end{aligned} \quad (9.20)$$

Termenii acestei sume au următoarele semnificații :

$\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_n r_n^2 =$   
 $= J_{\Delta_*}$  reprezintă momentul de inerție față de axa  $\Delta_*$ ,

$d^2 (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \Delta m_n) = d^2 M$ ;

distanța  $d$  iese în factor, fiind aceeași pentru toate porțiunile

$\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$ , iar  $\sum_{i=1}^n \Delta m_i = M$ ,

$M$  fiind masa totală a corpului ;

$2(d\Delta m_1 r_1 + \Delta m_2 r_2 + \dots + \Delta m_n r_n) = 2d M r_G = 0$  (vezi formula) (2.26)

deoarece distanța centrului de greutate față de el însuși e nulă.

Înlocuind în (9.20) obținem :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_*} + Md^2. \quad (9.21)$$

Din această relație rezultă că pentru a calcula momentul de inerție al unui corp în raport cu o axă  $\Delta$  paralelă cu axa  $\Delta_*$  care trece prin centrul de greutate al corpului (față de care momentul de inerție al corpului este cunoscut) nu mai este nevoie să se aplice formula (9.20), ci el se obține adunînd la momentul de inerție  $J_{\Delta_*}$  cunoscut, produsul dintre masa corpului și pătratul distanței dintre cele două axe.

c) **Calculul cîtorva momente de inerție.** În cele ce urmează vom calcula momentele de inerție ale cîtorva corpuri care apar mai des în aplicații.

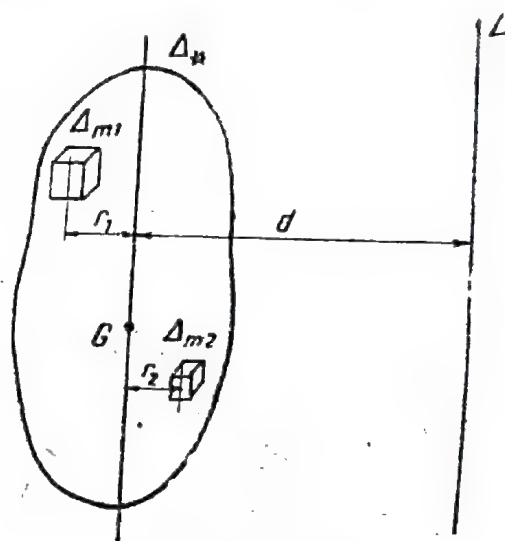
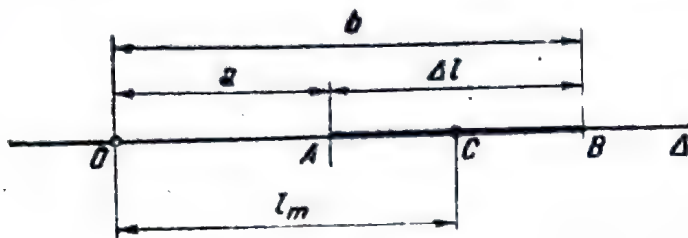


Fig. 9.6.

Înainte de a efectua acest calcul, vom demonstra însă două relații de geometrie care ne vor fi de folos în cele ce vor urma.

Să considerăm o dreaptă oarecare  $\Delta$  pe care se află un segment  $AB$  de lungime  $\Delta l$  și un punct fix  $O$ . Depărtările extremităților  $A$  și  $B$  ale segmentului precum și a mijlocului său  $C$  față de punctul  $O$  le vom nota respectiv prin  $a$ ,  $b$  și  $l_m$ .  
Avem (fig. 9.7, a) :



$$l_m = a + \frac{\Delta l}{2}, \quad (9.22)$$

$$l_m = b - \frac{\Delta l}{2},$$

de unde făcînd suma :

$$2l_m = b + a$$

și ridicînd la pătrat

$$4l_m^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Să presupunem acum că segmentul  $AE$  este foarte mic ; aceasta înseamnă că vom putea pune  $ab \approx l_m^2$  ; înlocuind mai sus rezultă :

$$4l_m^2 = a^2 + b^2 + 2l_m^2 \quad (9.23)$$

sau :

$$l_m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}. \quad (9.24)$$

Din relația (9.23) mai deducem și :

$$4l_m^2 - ab = a^2 + b^2 + ab.$$

Înlocuind în membrul întîi al acestei relații  $ab \approx l_m^2$  mai obținem și :

$$l_m^2 = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3}. \quad (9.25)$$



Relațiile (9.24) și (9.25) ne vor folosi în demonstrațiile care vor urma.

α) *Momentul de inerție al unei bare drepte omogene avînd secțiunea constantă.* Să considerăm bara dreaptă omogenă din figura 9.7, b avînd secțiunea de o formă oarecare (circulară, pătrată etc.) de arie  $A$ , constantă în lungul barei; bara are lungimea  $l$  și masa specifică (masa unității de volum) constantă și egală cu  $\rho$ . Vom calcula momentul de inerție al barei în raport cu axa  $\Delta$  care trece printr-una din extremitățile sale.

Pentru, aceasta, vom considera bara împărțită într-un număr foarte mare de porțiuni foarte înguste, prin plane perpendiculare pe axa sa. Să alegem o asemenea porțiune; momentul său de inerție  $\Delta I$  în raport cu axa  $\Delta$  va fi conform formulei (9.19) (v. fig. 9.7, b):

$$\Delta I = \Delta m l_m^2 \quad (9.26)$$

în care  $\Delta m$  este masa porțiunii de bară, iar  $l_m$  este depărtarea de axă a centrului porțiunii. Dar:

$\Delta m = \text{masa specifică} \times \text{volumul porțiunii} = \rho A (l_2 - l_1)$ , iar în baza formulei (9.25):

$$l_m^2 = \frac{l_1^2 + l_1 l_2 + l_2^2}{3}$$

Înlocuind acum în formula (9.26) și efectuînd calculele obținem:

$$\Delta I = \frac{\rho A}{3} (b^3 - a^3).$$

*Tabela 9.1*

Expresiile momentelor de inerție

Cu ajutorul acestei formule putem alcătui momentele de inerție ale fiecărei porțiuni în care a fost împărțită bara, după cum se arată în tabela 9.1.

Pentru aflarea momentului de inerție total al barei în raport cu axa  $\Delta$  va trebui să însumăm între ele momentele de inerție ale

Porțiune	$a$	$b$	$\Delta I$
I	0	1	$\frac{\rho A}{3} l_1^3$
II	1	2	$\frac{\rho A}{3} (l_2^3 - l_1^3)$
$n$	$l_n^3$	$l_{n-1}^3$	$\frac{\rho A}{3} (l_n^3 - l_{n-1}^3)$

părților sale componente (termenii ultimei coloane a tabelii). Observăm că în această sumă toți termenii din paranteze se reduc, cu excepția ultimului; obținem:

$$I = \frac{\rho A}{3} l^3 = \frac{\rho A l^3}{3}.$$

În această expresie,  $V = Al$  reprezintă volumul întregii bare, iar  $M = \rho Al = \rho V$  reprezintă masa întregii bare. Rezultă:

$$J_\Delta = \frac{Ml^2}{3}. \quad (9.27)$$

β) *Momentul de inerție al unei coroane circulare foarte subțiri în raport cu axa de rotație care trece prin centrul coroanei.* Să considerăm o coroană de rază  $R$ . Dacă descompunem această coroană în porțiuni foarte mici, ca în figura 9.8, a, fiecare por-

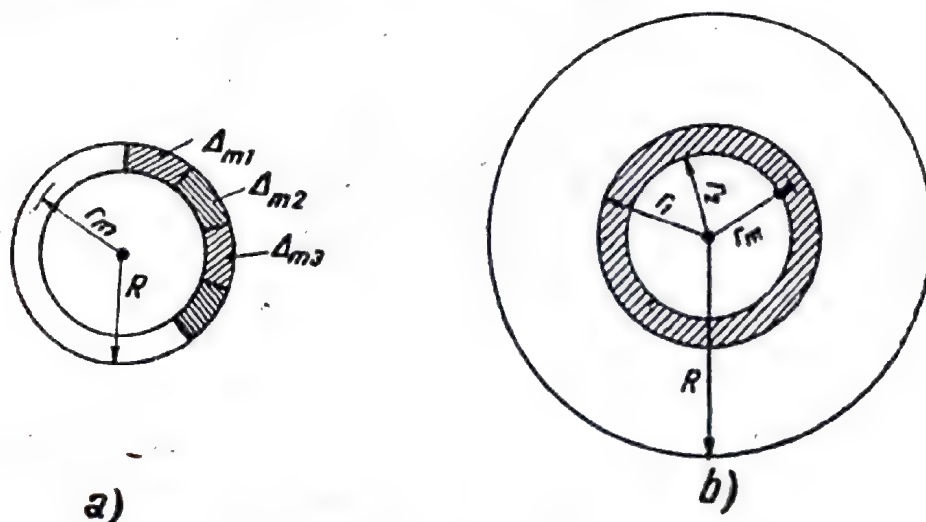


Fig. 9.8.

țiune avînd o masă  $\Delta m$ , și notăm cu  $r_m$  distanța de la mijlocul porțiunii pînă la axa  $\Delta$ , adică pînă la centrul  $O$  al coroanei, momentele de inerție ale porțiunilor vor avea următoarele expresii:

$$\Delta I_1 = \Delta m_1 r_m^2, \quad \Delta I_2 = \Delta m_2 r_m^2, \quad \dots, \quad \Delta I_n = \Delta m_n r_m^2;$$

ținînd seama că din cauza grosimii neglijabile a coroanei avem  $r_m \approx R$  și însumînd momentele de inerție ale porțiunilor vom avea:

$$I = R^2(\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \Delta m_n) = MR^2, \quad (9.28)$$

unde am notat prin  $M$  masa totală a coroanei (suma maselor tuturor porțiunilor sale).

$\gamma$ ) *Momentul de inerție al unui disc subțire în raport cu axa care trece prin centrul său și este perpendiculară pe planul său* (fig. 9.8, b). Vom descompune discul în porțiuni de coroane circulare foarte subțiri; dacă notăm prin  $r_m$  raza medie a unei coroane și prin  $\Delta m$  masa sa, momentul de inerție al coroanei în raport cu axa perpendiculară pe planul discului are valoarea [v. formula (9.28)]:

$$\Delta I = \Delta m r_m^2. \quad (9.29)$$

Dacă notăm prin  $\rho$  masa specifică superficială (densitatea discului) vom avea:

$$\Delta m = \text{masa specifică} \times \text{suprafața coroanei} = \rho \pi (r_1^2 - r_2^2) \quad (9.30)$$

Dacă ținem seama că distanțele  $r_1$  și  $r_2$  diferă foarte puțin între ele, putem aplica formula (9.24) scriind:

$$r_m^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}. \quad (9.31)$$

Introducînd în (9.29) relațiile (9.30) și (9.31), obținem:

$$\Delta I = \pi \rho (r_1^2 - r_2^2) \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = \frac{\pi \rho}{2} (r_1^4 - r_2^4).$$

Cu ajutorul acestei formule putem calcula momentele de inerție ale tuturor coroanelor din care este alcătuit discul; astfel, pentru prima coroană de la periferia discului avem  $r_1 = R$  și deci:

$$\Delta I = \frac{\pi \rho}{2} (R^4 - r_2^4).$$

Coroana imediat următoare are raza exterioară egală cu raza interioară  $r_2$  a coroanei precedente, deci:

$$\Delta I_2 = \frac{\pi \rho}{2} (r_2^4 - r_3^4)$$

și așa mai departe se pot scrie momentele de inerție ale tuturor coroanelor din care se compune discul dat. Ultima coroană are raza interioară neglijabilă, așa că o vom lua egală cu zero. Momentul de inerție  $I$  al discului este egal cu suma momentelor de inerție ale coroanelor elementare.

$$\begin{aligned} I &= \Delta I_1 + \Delta I_2 + \dots + \Delta I_n = \\ &= \frac{\pi \rho}{2} (R^4 - r_1^4 + r_2^4 - r_3^4 + \dots + 0) = \frac{\pi \rho}{2} R^4. \end{aligned} \quad (9.32)$$



Cum discul este omogen, putem defini densitatea superficială ca raportul dintre masa  $M$  și suprafața întregului disc :

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Înlocuind în (9.32) obținem final :

$$I = \frac{1}{2} MR^2. \quad (9.33)$$

8) *Momentul de inerție al unui cilindru plin în raport cu axa sa.* Considerînd cilindrul ca un ansamblu de discuri circulare subțiri înșirate pe axa sa, dacă notăm prin  $\Delta m$  masa unui asemenea disc și prin  $\Delta I$  momentul său de inerție în raport cu axa care trece prin centrul său și e perpendiculară pe disc, avem după formula (9.33) :

$$\Delta I = \frac{1}{2} \Delta m R^2$$

și prin însumare

$$I = \frac{1}{2} R^2 (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \Delta m_n) = \frac{1}{2} MR^2, \quad (9.34)$$

$M$  fiind masa întregului cilindru.

Bara dreaptă și discul circular sînt două corpuri care se întîlnesc foarte des în aplicații; momentele de inerție pentru corpuri avînd alte forme, față de axe care trec prin centrul de greutate, se găsesc gata calculate în tabele.

## 8. Energie cinetică (energie de mișcare)

a) **Punctul material.** Să considerăm un punct material de masă  $m$  avînd viteza  $v$ ; prin definiție, vom denumi energia cinetică a punctului  $m$  mărimea :

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2. \quad (9.35)$$

Această mărime constituie o măsură a capacității acestei mișcări de a produce lucrul mecanic, deci de a se transforma în orice fel de mișcare. Engels consideră cantitatea  $\frac{mv^2}{2}$  ca mișcare mecanică măsurată prin capacitatea ei de a se transforma într-o „anumită cantitate de mișcare de altă formă”. Energia cinetică este o mărime scalară, totdeauna pozitivă și variabilă în general cu timpul.

b) **Solidul rigid și sistemul de solide rigide.** Prin definiție, vom denumi energie cinetică a unui solid rigid, pentru o poziție oarecare, suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor sale :

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_n^2, \quad (9.36)$$

$n$  fiind numărul punctelor solidului<sup>1</sup>.

Energia cinetică a unui sistem de solide rigide este egală de asemenea cu suma energiilor cinetice ale corpurilor care compun sistemul.

Energia cinetică a unui solid rigid are diferite expresii după mișcarea pe care o are solidul considerat ; în cele ce urmează vom calcula aceste expresii pentru mișcările solidului rigid studiate în partea a III-a a acestei lucrări (*Cinemática*).

*Solid rigid aflat în mișcare de translație.* În mișcarea de translație, vitezele tuturor punctelor rigidului fiind aceleași, avem  $v_1 = v_2 = \dots = v_n = v$  și formula (9.36) devine :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v^2 = \\ &= \frac{1}{2} v^2 (m_1 + m_2 + \dots + m_n) = \frac{1}{2} M v^2, \end{aligned} \quad (9.37)$$

unde s-a notat prin  $M$  suma maselor punctelor care alcătuiesc solidul, adică masa totală a solidului. ( $M = \frac{G}{g}$ ,  $G$  greutatea solidului,  $g$  accelerația gravitației.)

*Solid rigid aflat în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe.* Într-o asemenea mișcare, vitezele punctelor solidului se exprimă prin formulele :

$$v_1 = \omega r_1, \quad v_2 = \omega r_2, \dots, \quad v_n = \omega r_n, \quad (9.38)$$

$r_1, r_2, \dots, r_n$  reprezentînd distanțele punctelor la axa de rotație ; înlocuind în formula (9.36), avem :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m_1 (\omega r_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\omega r_2)^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n (\omega r_n)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2) = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2, \end{aligned} \quad (9.39)$$

în care s-a notat prin  $J_\Delta$  momentul de inerție al întregului corp față de axa de rotație [v. formula (9.19)].

<sup>1</sup> În realitate, numărul  $n$  este infinit de mare.

*Solid rigid aflat în mișcare plan-paralelă.* După cum am văzut la cinematică, solidul rigid aflat în mișcare plan-paralelă are o distribuție de viteze la un moment dat ca și cum s-ar roti în jurul unei axe  $\Delta$  (axa instantanee) variabilă atât față de sistemul de referință fix cât și față de corp. Energia cinetică se calculează în acest caz după formula (9.39), în care atât momentul de inerție  $J_{\Delta}$  cât și viteza unghiulară  $\omega$  sînt variabile de la un moment la altul. Pentru a evita în anumite probleme calculul cu momente de inerție variabile, expresia energiei cinetice a unui solid rigid aflat în mișcare plan-paralelă se pune sub o altă

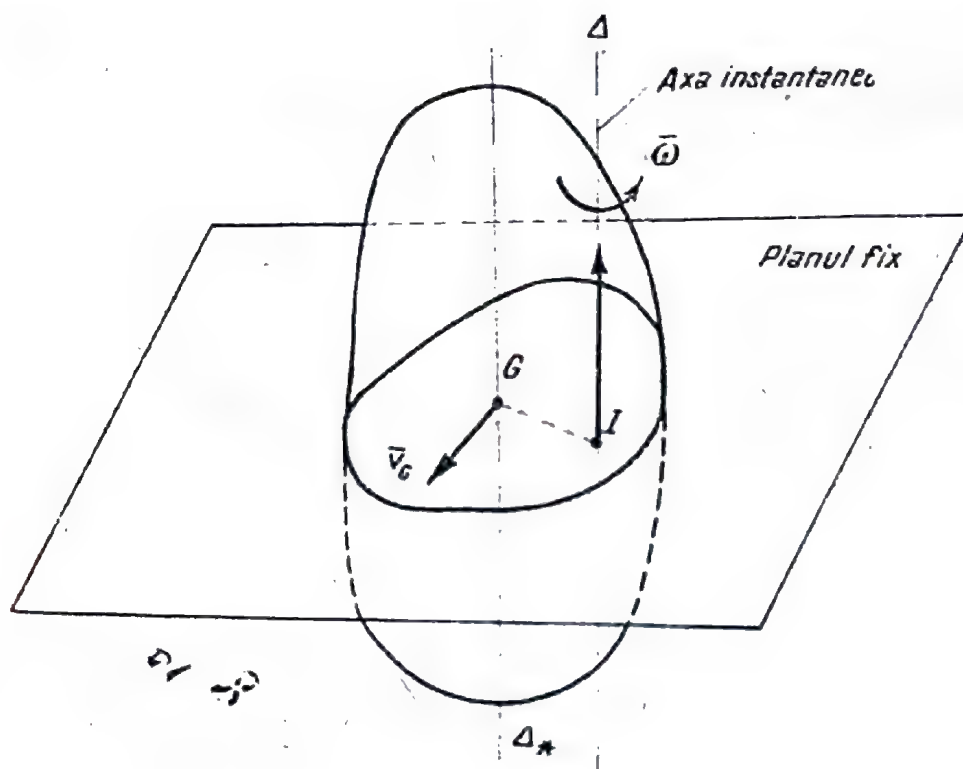


Fig. 9.9.

formă, exprimînd momentul de inerție  $J_{\Delta}$  în funcție de momentul de inerție al rigidului în raport cu axa  $\Delta_*$  paralelă cu  $\Delta$ , dar trecînd prin  $G$  (fig. 9.9); avem după formula (9.22):

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_*} + M \cdot IG^2,$$

$M$  fiind masa totală a rigidului,  $I$  centrul instantaneu,  $G$  centrul de greutate al rigidului; dar viteza centrului de greutate se exprimă prin formula:

$$v_G = \omega \cdot IG.$$



Înlocuind în (9.29) obținem :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} (J_{\Delta*} + M I G^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2 + M (I G \cdot \omega)^2 = \\ &= \frac{1}{2} J_{\Delta*} \omega^2 + M v_G^2. \end{aligned} \quad (9.40)$$

În această formulă, singurele elemente variabile cu timpul sînt vitezele  $\omega$  și  $v_G$ .

*Solid rigid aflat în mișcare elicoidală.* Din cinematică se știe că mișcarea elicoidală este o mișcare compusă dintr-o translație cu viteza  $v_0$ , în lungul axei mișcării, și o rotație cu viteza unghiulară  $\omega$ , în jurul acestei axe. Vitezele punctelor  $M_1, M_2, \dots, M_n$  avînd masele  $m_1, m_2, \dots, m_n$  situate la distanțele  $r_1, r_2, \dots, r_n$  de axa mișcării au două componente : una, de modul  $v_0$ , datorată translației orientată paralel cu axa mișcării și alta de module  $\omega r_1, \omega r_2, \dots, \omega r_n$  orientate perpendicular pe această axă. Aceste două componente fiind perpendiculare între ele, modulele vitezelor rezultante ale punctelor  $M_1, M_2, \dots, M_n$  vor avea valorile :

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v_0^2 + \omega^2 r_1^2 \\ v_2^2 &= v_0^2 + \omega^2 r_2^2 \\ &\vdots \\ v_n^2 &= v_0^2 + \omega^2 r_n^2 \end{aligned}$$

Introducînd aceste expresii ale vitezelor în formula generală (9.36) obținem :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} v_0^2 (m_1 + m_2 + \dots + m_n) + \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2) = \\ &= \frac{1}{2} M \cdot I G^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2, \end{aligned} \quad (9.41)$$

$M$  fiind masa totală a corpului, iar  $J_{\Delta}$  momentul său de inerție în raport cu axa mișcării.

Această expresie poate fi adusă la o formă similară celei date de (9.40), exprimînd momentul de inerție  $J_{\Delta}$  în funcție de momentul de inerție al rigidului în raport cu axa  $\Delta_*$  paralelă cu  $\Delta$  dar trecînd prin  $G$  (fig. 9.10) ; avem, după formula (9.20) :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_*} + M \cdot O G^2,$$

$M$  fiind masa totală a rigidului,  $G$  centrul său de greutate,  $O$  proiecția centrului de greutate pe axa mișcării; înlocuind în (9.41) obținem :

$$E_c = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} (J_{\Delta_*} + M \cdot OG^2) \omega^2 = \frac{1}{2} M (v_0^2 + OG^2 \cdot \omega^2) + \frac{1}{2} J_z \omega^2. \quad (9.42)$$

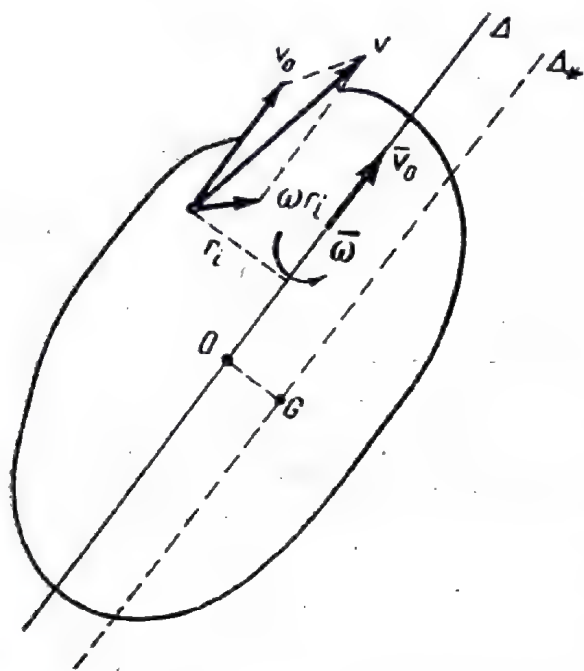


Fig. 9.10

Dar :

$$v_0^2 + OG^2 \omega^2 = v_G^2$$

reprezintă modulul vitezei centrului de greutate  $G$  al rigidului; înlocuind în (9.42) obținem :

$$E_c = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (9.43)$$

adică o formulă similară celei dată de (9.40). Se poate arăta că această formulă este generală, adică cu ajutorul ei se exprimă energia cinetică la un moment dat pentru un corp rigid avînd orice fel de mișcare; după cum se poate verifica ușor, ea include drept cazuri particulare mișcările de trans-

lație și de rotație ale rigidului. Ea este cunoscută sub denumirea de *teorema lui Koenig* și se enunță astfel : *energia cinetică a unui solid rigid se compune din energia cinetică a solidului dacă s-ar mișca în translație cu viteza centrului său de greutate, la care se adună energia sa cinetică de rotație cu viteza sa unghiulară  $\omega$  în jurul unei axe  $\Delta_*$  paralelă cu suportul vitezei unghiulare de rotație trecînd prin centrul de greutate.*

## 9. Energie potențială (energie de poziție)

Una dintre proprietățile importante ale materiei este aceea de a putea înmagazina lucrul mecanic al forțelor care o acționează, pe care apoi să-l înapoieze corpurilor materiale din jurul său, adică să producă un nou lucru mecanic.



Pentru a înțelege modul în care materia înmagazinează și înapoiază apoi lucrul mecanic înmagazinat, vom examina câteva cazuri simple.

Să considerăm un resort neîntins avînd lungimea sa naturală și să-l întindem sau să-l comprimăm, iar apoi să-i fixăm extremitățile în această nouă poziție. Cu toate că atît în primul cît și în cel de-al doilea caz el se află în repaus, între aceste două situații există o deosebire : în timp ce în primul caz, arcu este neîntins, iar pentru a fi pus în mișcare are nevoie de o acțiune exterioară, în cel de-al doilea caz, dacă i se dă drumul, el se pune în mișcare fără nici o acțiune exterioară, putînd chiar produce lucru mecanic, concretizat în aceea că poate pune în mișcare un mecanism, poate ridica o greutate etc. Lucrul mecanic produs în cel de-al doilea caz nu reprezintă altceva decît restituirea lucrului mecanic înmagazinat de arc pentru aducerea lui din prima în cea de-a doua situație. Vom spune deci că arcu întins posedă o *energie potențială* sau o *energie de poziție* obținută de el prin înmagazinarea lucrului mecanic al forțelor care l-au acționat în timpul întinderii sale. Această energie, spre deosebire de energia înmagazinată de materia aflată în mișcare (*energia cinetică*), depinde numai de poziția arcului, fapt pentru care a și fost denumită energie potențială.

Prin eliberarea arcului întins, el se pune în mișcare înapoind lucrul mecanic înmagazinat și pierzînd în același timp posibilitatea de a mai produce datorită poziției sale lucru mecanic, pierzîndu-și deci energia potențială. Energia potențială a arcului este variabilă deci cu poziția sa : cu cît el este mai întins, el are o energie potențială mai mare.

În același mod, un corp greu ridicat la o înălțime oarecare de la suprafața pămîntului înmagazinează o energie potențială pe care și-o păstrează atît timp cît rămîne în poziția ridicată și pe care poate s-o redea sub formă de lucru mecanic prin căderea sa, punînd, spre exemplu, în mișcare o mașină. Deoarece și această energie este datorită numai poziției corpului, ea va fi denumită tot energie potențială. Schimbîndu-și poziția, corpul se va pune în mișcare, înapoind lucrul mecanic înmagazinat și pierzîndu-și energia sa potențială.

Alte cazuri de corpuri materiale care posedă energie potențială sînt: gazele comprimate într-un recipient, un ciocan aflat în poziție ridicată, apa dintr-un rezervor situat la înălțime ; în toate aceste cazuri, corpurile pot produce lucru mecanic numai datorită poziției lor.

Calculul energiei potențiale se face astfel : se alege o poziție în care energia potențială este nulă și se calculează lucrul me-



canic rezistent necesar aducerii sistemului material considerat din poziția de energie potențială nulă pînă în poziția dorită; lucrul mecanic rezistent astfel calculat și luat cu semn schimbat reprezintă energia potențială căutată, deci :

$$E_p = -L \quad (9.44)$$

( $E_p$  energia potențială,  $L$  lucrul mecanic rezistent). Spre exemplu, lucrul mecanic rezistent necesar aducerii unei greutate  $G$  de la suprafața pămîntului la înălțimea  $h$  este :

$$L = -Gh, \quad (9.45)$$

iar energia potențială înmagazinată de greutatea  $G$  este :

$$E_p = -L = Gh. \quad (9.46)$$

## 10. Energie mecanică

Prin definiție, vom înțelege prin energie mecanică a unui sistem material, la un moment dat, suma dintre energiile sale potențială și cinetică la momentul considerat :

$$E_m = E_p + E_c. \quad (9.47)$$

## 11. Impuls

O altă măsură a mișcării mecanice, măsură menită să indice capacitatea mișcării mecanice de a se transforma tot în mișcare mecanică, este *impulsul*, pe care-l vom defini în cele ce urmează.

a) **Punctul material.** Să considerăm un punct material  $M$  de masă  $m$  avînd viteza  $\bar{v}$  tangentă la traiectoria sa (curbă  $C$ ). Vom denumi prin definiție impuls al punctului  $M$  vectorul (fig. 9.11)

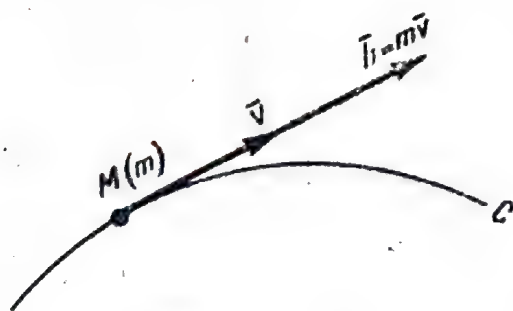


Fig. 9.11.

$$\bar{h} = m\bar{v}, \quad (9.48)$$

coliniar și de același sens cu viteza  $\bar{v}$  a punctului și de  $m$  ori mai mare. Pe axele unui sistem de referință cartezian el are proiecțiile :

$$\begin{aligned} h_x &= m v_{x_1} \\ h_y &= m v_{y_1} \\ h_z &= m v_{z_1} \end{aligned} \quad (9.49)$$

Noțiunea de impuls a fost introdusă sub formă științifică de Leonardo da Vinci și Galilei sub denumirea de „impetus”. După Engels, impulsul (sau cantitatea de mișcare cum mai este denumit produsul  $m\bar{v}$ ) este „mișcare mecanică măsurată prin mișcare mecanică”.

b) **Solid rigid și sistem de solide rigide.** Pentru un solid rigid, impulsul total  $\bar{H}$  se obține adunînd vectorial, după regula de la capitolul II, pct. b, impulsurile punctelor sale materiale :

$$\bar{H} = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 + \dots + m_n \bar{v}_n. \quad (9.50)$$

În mod analog, pentru un sistem de solide rigide, impulsul total este suma vectorială a impulsurilor corpurilor componente. Pe axele unui sistem de referință cartezian, proiecțiile vectorului impuls  $\bar{H}$  sînt :

$$\begin{aligned} H_x &= m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \dots + m_n v_{nx}, \\ H_y &= m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + \dots + m_n v_{ny}, \\ H_z &= m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z} + \dots + m_n v_{nz}. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Aceste expresii pot fi transformate în altele mai simple care să nu mai conțină sume ; într-adevăr să considerăm una dintre ele :

$$H_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \dots + m_n v_{nx}.$$

Ea mai poate fi scrisă și astfel :

$$H_x = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n.$$

Deoarece derivata sumei este egală cu suma derivatelor, iar mărimile  $m_1, m_2, \dots, m_n$  sînt niște constante putem scrie :

$$H_x = (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n).$$

Dar în baza formulelor (2.26) paranteza reprezintă coordonata  $\xi$  a centrului de greutate al sistemului, deci :

$$H = (M x_G)' = M \dot{x}_G = M v_{Gx},$$

$M$  fiind masa totală a corpului, iar  $x_G$  abscisa centrului său de greutate. Formulele (9.51) se vor scrie deci :

$$\begin{aligned} H_x &= Mv_{Gx}, \\ H_y &= Mv_{Gy}, \\ H_z &= Mv_{Gz}. \end{aligned} \quad (9.52)$$

Sub această formă, ele pot fi folosite mult mai ușor în aplicații. Aceste formule pot fi concentrate în următoarea formulă vectorială :

$$\vec{H} = M\vec{v}_G.$$

Comparînd între ele formulele (9.49) și (9.52) putem spune că *impulsul unui corp este egal cu impulsul centrului său de greutate în care s-ar afla întreaga masă a corpului.*

## 12. Principiile mecanicii

Mecanica este una dintre științele naturii care a izvorît din nevoile vieții zilnice, adică din nevoia omului de a construi unelte, case, drumuri etc. Ea s-a dezvoltat o dată cu dezvoltarea forțelor de producție de-a lungul diferitelor orînduiri sociale.

Apărută din nevoile vieții practice, mecanica este o știință experimentală, care s-a dezvoltat pe temeiul generalizării practicii. Consecința cea mai importantă a acestei generalizări o constituie elaborarea unor adevăruri fundamentale, asemănătoare postulatelor sau axiomelor din geometrie, denumite *principii*.

Vom înțelege prin principiu *un adevăr fundamental care nu poate fi demonstrat*, deoarece nu poate fi redus la altul mai simplu. Principiile pot fi verificate experimental indirect prin consecințele lor.

Principiile mecanicii au fost enunțate într-o formă rămasă valabilă pînă în zilele noastre de către Isaac Newton.

Ele vor fi examinate în cele ce urmează.

a) **Principiul inerției.** Corpurile din natură se pot afla în două stări în raport cu un anumit sistem de referință : în stare de repaus, caracterizată prin aceea că mărimile geometrice care determină poziția corpului respectiv în raport cu sistemul considerat nu variază cu timpul, sau în stare de mișcare, caracterizată prin aceea că aceste mărimi sînt funcții de timp. Un caz particular de mișcare, important pentru cele ce vor urma, îl



constituie mișcarea rectilinie și uniformă, în cazul punctului respectiv mișcarea de translație rectilinie și uniformă, în cazul solidului rigid.

Să considerăm un corp aflat în mișcare de translație rectilinie și uniformă sau în repaus; după cele cunoscute din experiență, deducem că el își va păstra starea de repaus sau cea de mișcare rectilinie și uniformă atît timp cît din exterior nu se va exercita asupra sa vreo forță. Această concluzie nu o putem verifica direct, deoarece în natură nu există nici un corp care să poată fi sustras complet acțiunii altor corpuri; de aceea, vom putea numai s-o deducem, observînd mișcările diferitelor corpuri din natură. Astfel, să aruncăm pe podea un corp prismatic cu o anumită viteză inițială; acest corp va aluneca în mișcare de translație rectilinie cu o viteză din ce în ce mai mică pînă cînd, în cele din urmă, se va opri.

Să aruncăm acum același corp cu aceeași viteză inițială pe o podea lustruită; vom constata că el se va mișca în același mod ca și în cazul anterior, cu deosebirea că scăderea vitezei sale va fi mai mică și el se va opri mai departe decît în primul caz.

Aruncînd corpul pe suprafețe din ce în ce mai lucii, constatăm că el va parcurge distanțe din ce în ce mai mari. Dacă generalizăm această experiență, ajungem la următoarea concluzie: oprirea corpului nostru se datorează forței de frecare ce ia naștere la contactul corpului cu suprafața pe care alunecă. Cu cît suprafața de alunecare este mai lucie, cu atît această forță este mai mică și cu atît efectul ei asupra corpului este mai mic și distanța parcursă pînă la oprire este mai mare; dacă ea nu ar exista, corpul s-ar mișca la infinit cu viteza pe care ar căpăta-o în primul moment, rectiliniu și uniform.

Generalizînd acum rezultatele tuturor experiențelor de acest fel din natură, ajungem la primul principiu al mecanicii, denumit principiul inerției; el se enunță astfel: *un punct material nu-și schimbă starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atît timp cît nu intervine vreo forță care să-i modifice această stare.*

**O b s e r v a Ț i e .** Din primul principiu al mecanicii rezultă că corpurile din natură își păstrează fie starea lor de repaus, fie starea lor de mișcare rectilinie și uniformă, neputîndu-și modifica prin ele însele, fără acțiunea altor corpuri, această stare; proprietatea aceasta a corpurilor se numește *inerție*.

Proprietatea de inerție a corpurilor o întîlnim mereu în practică; ea este uneori folosită de om în activitatea sa. Astfel, brutarul, după ce introduce în cuptor cu lopata aluatul pentru

pîine, trage repede lopata ; aluatul își păstrează starea sa de repaus și rămîne în cuptor. Muncitorul care lucrează cu o sculă metalică prinsă într-o coadă de lemn (topor, ciocan) își înțepește partea metalică în lemn izbind cu tărie partea de lemn de un perete fix ; partea metalică păstrîndu-și starea de mișcare căpătată se înfige în lemn.

b) **Principiul acțiunii forțelor.** Să observăm ce acțiune exercită forțele asupra corpurilor cărora le sînt aplicate ; dacă atîrnăm o greutate de tavan prin intermediul a două fire, ea rămîne în repaus ; dacă asupra unui cărucior, care se află în repaus, aplicăm o forță, căruciorul trece din starea de repaus în cea de mișcare și apoi viteza sa crește din ce în ce ; dacă dăm drumul unei bile pe podea, sub acțiunea forței de frecare viteza sa scade, pînă cînd bila se va opri.

Rezultă deci că forțele acționînd asupra corpurilor le produc accelerații ; între aceste două mărimi, forțe și accelerații, trebuie să existe deci o anumită legătură. Această legătură a fost descoperită de către înarele învățat Isaac Newton, care este unul dintre fondatorii mecanicii. Ea se enunță astfel : *dacă un punct material este acționat de o forță,  $F$ , el capătă, față de un sistem de referință fix, o mișcare a cărei accelerație este dirijată pe aceeași direcție și în același sens cu forța, și a cărei mărime este proporțională cu forța :*

$$a = \frac{F}{m},$$

$m$  fiind masa punctului. Acest principiu poate fi verificat pe cale experimentală în modul următor : unui anumit corp  $i$  se aplică forțele  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots$ , din ce în ce mai mari ; măsurînd accelerațiile  $a_1, a_2, a_3, \dots$  căpătate de corp sub acțiunea forțelor  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots$ , vom observa că (fig. 9.12) :

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = m \text{ (const).}$$

### Observații

— Principiul acțiunii forței exprimă faptul că  $\bar{F}$  și  $\bar{a}$  sînt doi vectori avînd același punct de aplicație, aceeași direcție și



același sens, în care vectorul  $\vec{F}$  este de  $m$  ori mai mare decât cel al accelerației  $\vec{a}$ . Aceasta se scrie (fig. 9.13) :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

— Principiul al doilea aplicat forței de gravitație (greutății corpurilor) se scrie :

$$\vec{G} = m\vec{g},$$

în care  $\vec{G}$  este greutatea corpului respectiv, iar  $\vec{g}$  este accelerația gravitației ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ).

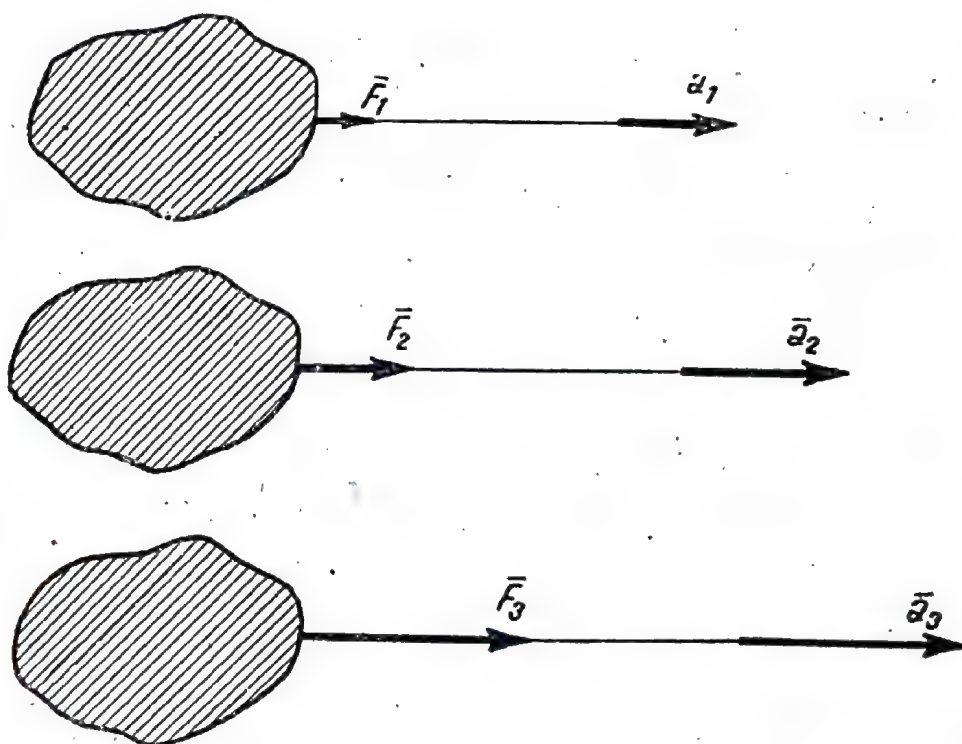


Fig. 9.12.

c) **Principiul acțiunii și reacțiunii.** S-a arătat că între diferitele corpuri din natură se exercită acțiuni reciproce sub forma de forțe sau cupluri de forțe. Să observăm cum se află între ele acțiunile reciproce a două corpuri.

Forța cu care punem în mișcare un corp reprezintă acțiunea corpului nostru asupra corpului pus în mișcare. În același timp, simțim o „rezistență” din partea corpului pe care vrem să-l punem în mișcare. Când tragem sau apăsăm un corp aflat în repaus, simțim de asemenea cum corpul respectiv acționează asupra noastră cu o forță dirijată în sens contrar celei cu care-l



acționăm noi. Aceasta se întâmplă nu numai atunci când cele două corpuri se află în contact direct, ci chiar și atunci când ele acționează unul asupra celuilalt fără să se afle în contact direct. Astfel, când ținem în mână un magnet și-l apropiem de o bucată de oțel, observăm cum oțelul este atras de magnet. Această

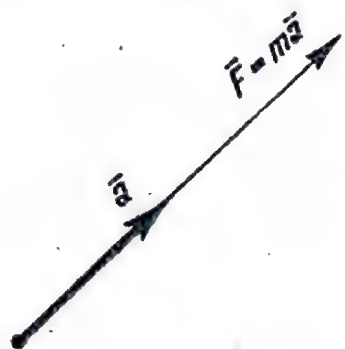


Fig. 9.13.

atracție reprezintă acțiunea magnetului asupra oțelului. La rândul său, și oțelul acționează asupra magnetului; dacă vom ține în mână oțelul și vom lăsa liber magnetul, vom observa cum acesta din urmă se va mișca spre bucata de oțel.

Generalizând toate aceste fenomene precum și altele asemănătoare lor, vom putea afirma că întotdeauna când un corp acționează asupra altuia cu o forță, cel de-al doilea corp acționează și el asupra primului cu o forță de sens contrar. Prima

dintre forțe o vom numi *acțiune*, iar pe cea de-a doua o vom numi *reacțiune*. Despre aceste două forțe, mecanica stabilește *principiul acțiunii și reacțiunii*, cel de-al treilea principiu al mecanicii. El se enunță astfel: *două puncte materiale acționează unul asupra celuilalt cu forțe egale și direct opuse*.

În baza acestui principiu, ajungem la ideea *dualității forțelor* din natură; într-adevăr, fiecare acțiune exercitată de un corp asupra altuia este însoțită întotdeauna de reacțiunea celui de-al doilea corp asupra primului, reacțiune care, în baza principiului enunțat, este egală și direct opusă acțiunii.

Principiul acțiunii și reacțiunii are largi aplicații în tehnică; astfel, motoarele cu reacție funcționează datorită forței de reacțiune exercitată de gazele care ies printr-un ajutoraj asupra corpului motorului.

**Observație.** Este important de menționat faptul că *cele două forțe, acțiunea și reacțiunea, nu se pot echilibra una cu cealaltă*, deoarece ele sînt aplicate unor corpuri diferite.

Într-adevăr, să ne închipuim că asupra unei bare așezată pe o masă aplicăm în extremitățile sale cu ajutorul mâinilor două forțe egale și direct opuse  $F$  (fig. 9.14). În baza principiului acțiunii și reacțiunii, bara va transmite în fiecare extremitate mâinilor noastre forțele  $F' = F$ , egale și direct opuse forțelor aplicate de mâinile noastre. Deși forțele  $F$  aplicate barei precum și forțele  $F'$  aplicate mâinilor noastre se echilibrează, totuși forțele  $F$  și  $F'$  nu-și fac singure echilibru. De acest fapt ne putem convinge ușor îndepărtînd una din mâini, spre exemplu mîna stîngă; deși au rămas numai forțele  $F$  și  $F'$  aplicate de mîna

noastră barei și respectiv de bară mîinii noastre, și deci aceste forțe sînt egale și direct opuse ele constituind acțiunea și reacțiunea, totuși ele nu-și fac echilibru; din practică știm că în acest caz bara se pune în mișcare.

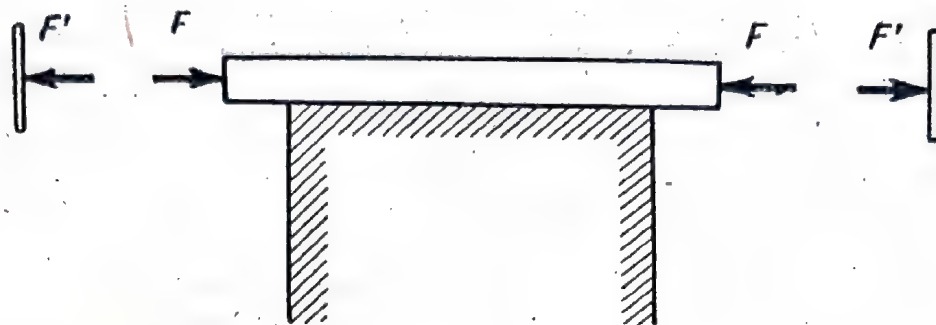


Fig. 9.14.

d) **Principiul paralelogramului.** Să considerăm un punct material supus acțiunii mai multor forțe; principiul paralelogramului se ocupă de mișcarea pe care o capătă un asemenea punct; el se enunță astfel: *dacă asupra unui punct material acționează simultan două forțe, mișcarea punctului este aceeași ca și cînd asupra sa ar acționa o singură forță avînd mărimea, direcția și sensul diagonalei paralelogramului construit cu ajutorul celor două forțe.*

De la două forțe, el poate fi extins din aproape în aproape la mai multe forțe; într-adevăr, în acest caz se va compune rezultanta a două dintre forțe cu cea de-a treia forță, apoi rezultanta acestor două forțe cu cea de-a patra forță ș.a.m.d.

Principiul paralelogramului n-a fost prezentat de Newton ca un principiu de sine stătător, ci ca o anexă a principiului al doilea. El are însă un conținut fizic de sine stătător, deoarece în baza lui putem aduna vectorii forțe după aceeași regulă după care adunăm, toți vectorii, adică după regula paralelogramului.

### 13. Forțe de inerție

a) **Punctul material.** Să presupunem că deplasăm prin intermediul unui fir o greutate (punct material) pe un plan orizontal (fig. 9.15); aplicînd firului o forță  $\vec{F}$ , aceasta se trans-

mite greutateii, care începe să se deplaseze cu accelerația  $\bar{a}$ . În baza principiului al doilea al mecanicii vom avea :

$$\bar{F} = m\bar{a},$$

în care  $m$  reprezintă masa punctului considerat. Dar o dată cu forța  $\bar{F}$  va apărea — în baza principiului acțiunii și reacțiunii — o altă forță  $\bar{F}_i = -\bar{F} = -m\bar{a}$ , egală și direct opusă forței  $\bar{F}$ . Această nouă forță este aplicată întotdeauna agentului care produce mișcarea corpului considerat, adică, în cazul de față, a celui care pune în mișcare greutatea.

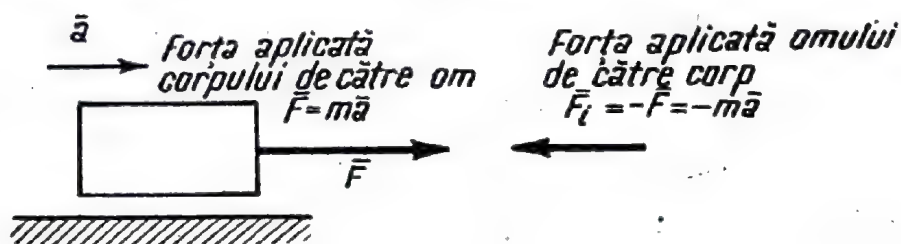


Fig. 9.15.

Această forță, denumită *forță de inerție*, constituie deci reacțiunea corpului considerat asupra corpurilor care-l acționează punîndu-l în mișcare. Ea are expresia :

$$\bar{F}_i = -m\bar{a}.$$

Proiecțiile forței de inerție pe axele unui triedru cartezian  $\bar{F}_i$  sînt :

$$\begin{aligned} F_{ix} &= -ma_x, \\ F_{iy} &= -ma_y, \\ F_{iz} &= -ma_z. \end{aligned} \quad (9.53)$$

Dacă se consideră accelerația punctului descompusă în componenta sa normală și tangențială, forța de inerție are componentele :

$$\begin{aligned} F_{it} &= -ma_t, \\ F_{in} &= -ma_n, \end{aligned} \quad (9.54)$$

denumite respectiv *forța de inerție tangențială* și *forța de inerție normală* sau *forța centrifugă*.

Forțele de inerție joacă un rol important la studiul mișcării sistemelor materiale.



b) **Solidul rigid și sistem de solide rigide.** Rezultanta forțelor de inerție a unui solid rigid se obține adunând vectorial forțele de inerție ale punctelor sale componente :

$$\bar{R}_i = \bar{F}_{i1} + \bar{F}_{i2} + \dots + \bar{F}_{in} = -M\bar{a}_G.$$

Se poate arăta că rezultanta forțelor de inerție ale unui solid rigid este egală cu masa totală a corpului înmulțită cu accelerația centrului său de greutate luată cu semn schimbat.

Rezultatul obținut este analog celui din cazul punctului material, cu deosebirea că în loc de accelerația punctului apare accelerația centrului de greutate al corpului.

Proiecțiile rezultantei forțelor de inerție pe axele unui triedru cartezian sînt :

$$\begin{aligned} R_{ix} &= -Ma_{Gx}, \\ R_{iy} &= -Ma_{Gy}, \\ R_{iz} &= -Ma_{Gz}, \end{aligned} \quad (9.55)$$

Dacă se consideră accelerația centrului de greutate descompusă în componentele sale normală și tangențială, rezultanta forțelor de inerție are componentele :

$$\begin{aligned} R_{in} &= -ma_{Gt}, \\ R_{in} &= -ma_{Gn}. \end{aligned} \quad (9.56)$$

#### 14. Momentul forțelor de inerție

**Punctul material.** Să considerăm un punct material  $M$  de masă  $m$ , avînd accelerația  $a$ . După cum am văzut, forța sa de inerție este :

$$\bar{F}_i = -m\bar{a}.$$

Să considerăm un punct fix  $O$  și să luăm momentul acestei forțe în raport cu punctul  $O$ . El poartă denumirea de *moment al forței de inerție*  $\bar{F}_i$  și joacă un rol important în studiul mișcării solidului rigid.

Mărimea acestui moment este, ca în cazul unei forțe oarecare :

$$M_{iO} = F_i d = mad, \quad (9.57)$$

$d$  fiind distanța de la punctul  $O$  la suportul forței de inerție,  $F_i$ .

**Exemplu.** Calculul momentului forțelor de inerție ale unui solid rigid cu axă fixă în raport cu axa de rotație (fig. 9.16). Pentru aceasta, vom împărți corpul dat într-un număr  $n$  de părți, avînd respectiv masele  $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$ . Forțele de inerție ale acestor părți au următoarele expresii :

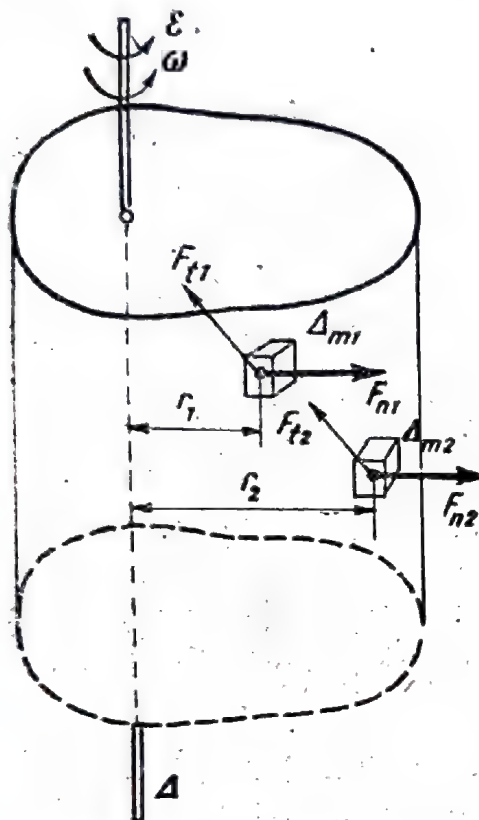


Fig. 9.6.

— forțele de inerție normale:

$$F_{n1} = \Delta m_1 r_1 \omega^2,$$

$$F_{n2} = \Delta m_2 r_2 \omega^2,$$

$\vdots$

$$F_{nn} = \Delta m_n r_n \omega^2;$$

— forțele de inerție tangențiale:

$$F_{t1} = \Delta m_1 r_1 \epsilon,$$

$$F_{t2} = \Delta m_2 r_2 \epsilon,$$

$\vdots$

$$F_{tn} = \Delta m_n r_n \epsilon.$$

Din figura 9.16 se observă forțele de inerție normale nu dau moment în raport cu axe de rotație, deoarece intersectează această axă. Forțele de inerție tangențiale fiind însă perpendiculare pe axa de rotație dau momentele:

$$M_1 = F_{t1} r_1 = \Delta m_1 r_1^2 \epsilon,$$

$$M_2 = F_{t2} r_2 = \Delta m_2 r_2^2 \epsilon,$$

$\vdots$

$$M_n = F_{tn} r_n = \Delta m_n r_n^2 \epsilon.$$

Momentul total al forțelor de inerție este:

$$M_t = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \epsilon (\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_n r_n^2).$$

Expresia din paranteză reprezintă momentul de inerție total  $I$  al corpului în raport cu axa  $\Delta$ ; obținem deci:

$$M_t = I_{\Delta} \epsilon. \quad (9.58)$$

## 15. Aplicații

a) Să se calculeze puterea pierdută prin frecare într-un lagăr de capăt pentru un arbore vertical. Se vor studia și compara rezultatele pentru cazul frecării pe fus sau cu bile (fig. 9.17).

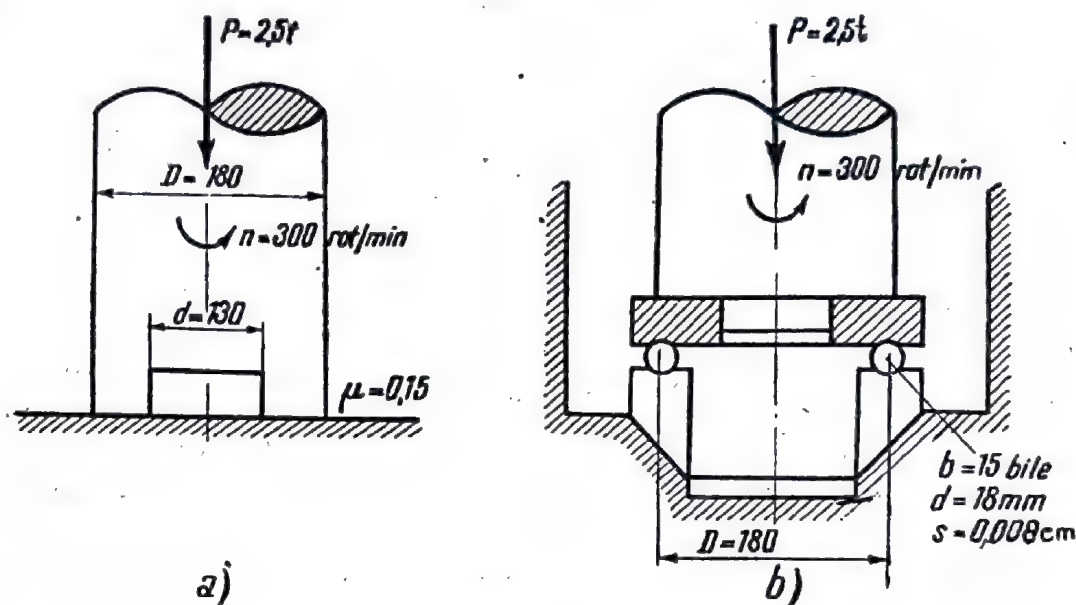


Fig. 9.17.

### Rezolvare

Vom calcula puterea pierdută prin frecare cu ajutorul formulei (9.11):

$$P_f = M_f \omega,$$

în care  $M_f$  este momentul rezultat al cuplului forțelor de frecare, de pivotare, iar  $\omega$  viteza unghiulară de rotație a acestui cuplu.

Pentru cazul din figura 9.17, a, expresia momentului rezultat al forțelor de frecare este dată de formula (3.7):

$$M_f = \frac{2}{3} \mu \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

Înlocuind valorile numerice obținem (forțele în kgf, distanțele în m, timpul în s):

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{2}{3} \times 0.15 \times 2500 \times \frac{0.09^3 - 0.065^3}{0.09^2 - 0.065^2} \times \frac{3.14 \times 300}{30} = \\ &= 921 \text{ kgfm/s} \approx 12 \text{ CP.} \end{aligned}$$



În cazul din figura 9.17, *b*, vom aplica aceeași formulă pentru calculul puterii pierdute prin frecare, în care  $M_f$  este momentul resultant al cuplului forțelor de frecare de rostogolire a bilei rulmentului, iar  $\omega$  viteza unghiulară de rotație a rulmentului.

Forța care revine fiecărei bile a rulmentului este :

$$N = \frac{P}{b},$$

$b$  fiind numărul de bile (se neglijează greutatea bilei). Momentul cuplului forțelor de frecare de rostogolire este (fig. 9.18, *a*):

$$M_f = N \cdot 2s = 2 \frac{P}{b} s.$$

Viteza unghiulară  $\omega$  a bilei rulmentului se obține împărțind viteza punctului de contact  $A$  al bilei cu inelul mobil (egală cu

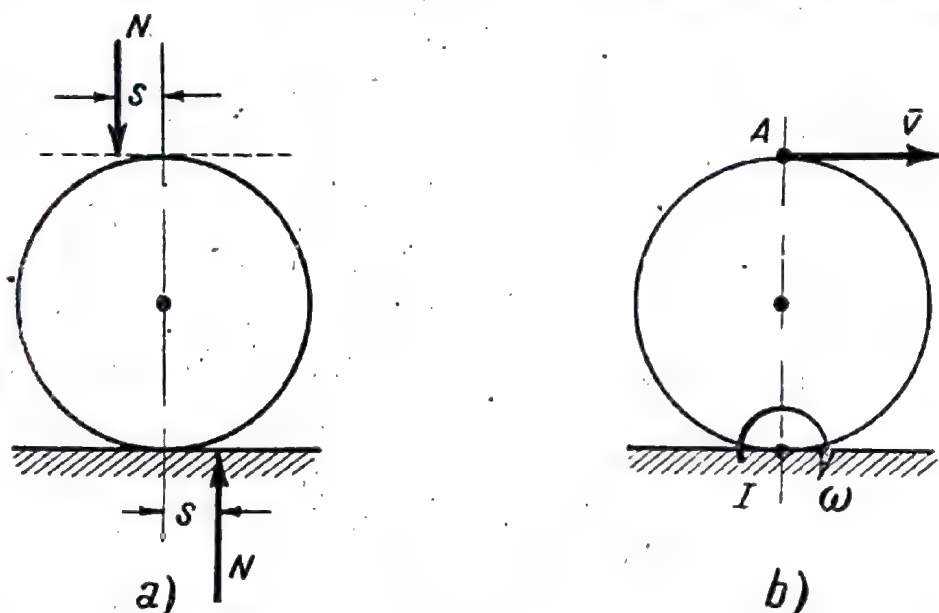


Fig. 9.18.

viteza arborelui în acest punct) la distanța pînă la centrul instantaneu  $I$ , deoarece bila are o mișcare plan-paralelă; avem deci (fig. 9.18, *b*):

$$\omega = \frac{v}{2r},$$

$r$  fiind raza bilei. Viteza  $v$  se calculează în funcție de turația  $n$  a arborelui cu formula :

$$v = \frac{\pi D n}{60}.$$

Înlocuind în formulă, obținem :

$$M_f = 2 \frac{P}{b} s \frac{\pi D n}{2 \times 60 r} = \frac{\pi D n P s}{60 b r},$$

care, cu valorile numerice în aceleași unități ca mai sus, conduce la :

$$M_f = \frac{3,14 \times 0,18 \times 300 \times 2500 \times 0,00008}{60 \times 15 \times 0,009} = 0,42 \frac{\text{kgfm}}{s} = \frac{0,42}{75} \text{ CP} = 0,0056 \text{ CP}.$$

b) Se cere să se calculeze pentru discul circular omogen de greutate  $G$  și rază  $R$ , care se rotește cu viteza unghiulară  $\omega$  și accelerația unghiulară  $\varepsilon$  (fig. 9.19), mărimile dinamice caracteristice.

#### Rezolvare

Discul are masa  $M$  și momentul de inerție în raport cu axa de rotație (formula 9.25) date de relațiile :

$$M = \frac{G}{g}, \quad J_{\Delta} = \frac{G}{g} \frac{R^2}{2}.$$

Centrul de greutate al discului fiind fix are atât viteza cât și accelerația nule :

$$v_G = a_G = 0.$$

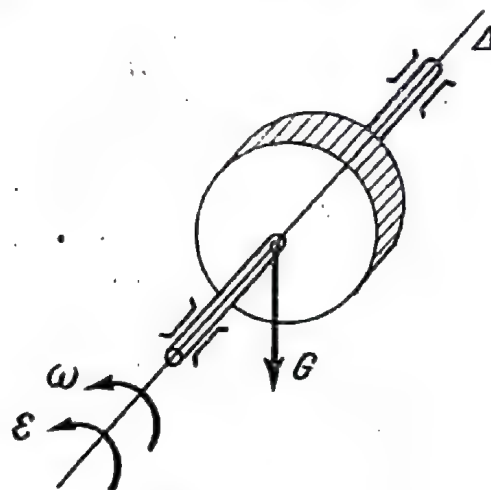


Fig. 9.19.

Cu aceasta, mărimile sale dinamice sînt :

— energia cinetică :  $E = \frac{1}{2} \frac{G}{g} \frac{R^2}{2} \omega^2$  (formula 9.39) ;

— impulsul :  $H = \frac{G}{g} \cdot 0 = 0$  (formulele 9.52) ;

— rezultanta forțelor de inerție :  $F_I = -\frac{G}{g} \cdot 0 = 0$  (formulele 9.55) ;

— momentul resultant al forțelor de inerție

în raport cu axa  $\Delta$   $M_{i\Delta} = -\frac{G}{g} \frac{R^2}{2} \varepsilon$  (formula 9.58).

## Capitolul X

### METODE GENERALE PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR DE DINAMICĂ

#### 1. Mărimile care intervin în studiul mișcării unui sistem material

După cum am mai arătat în introducere, dinamica se ocupă cu studiul mișcării corpurilor ținând seama de forțele care le acționează. Pe lângă mărimile care caracterizează vectorii forță aplicați sistemului material considerat, într-o problemă de mecanică intervin și o serie de caracteristici ale mișcării corpului respectiv (viteze, accelerații), precum și o serie de caracteristici mecanice ale corpului (masă, moment de inerție). După cum o parte din mărimile arătate sînt cunoscute iar altele necunoscute, problema respectivă se încadrează într-unul din cele trei tipuri arătate în introducere: probleme directe, inverse sau mixte.

În cele ce urmează vom analiza în detaliu mărimile care intervin într-o problemă de dinamică. Acestea sînt:

— *mărimi ce caracterizează forțele aplicate sistemului material*: module ale forțelor, unghiuri ale suporturilor forțelor, distanțe și unghiuri care caracterizează poziția punctelor lor de aplicație. Aceste mărimi sînt cunoscute pentru forțele date și parțial necunoscute pentru reacțiuni. Într-adevăr, pentru reacțiunea dintr-un reazem, modulul este necunoscut, iar pentru reacțiunea dintr-o articulație sînt necunoscute atît modulul cît și orientarea. Aceste mărimi pot fi constante sau variabile în timpul mișcării;

— *mărimi ce caracterizează mișcarea sistemului material*: distanțe și unghiuri variabile în timp, viteze liniare și unghiulare, accelerații liniare și unghiulare. Valorile particulare ale acestor mărimi pentru momentul în care începe mișcarea sistemului material considerat sînt denumite *condiții initiale*. Mărimile care caracterizează mișcarea unui sistem material sînt parțial cunoscute, deoarece de cele mai multe ori corpurile de a căror mișcare ne ocupăm se află în contact cu alte corpuri înconjurătoare, fapt care impune anumite restricții mișcării lor;



— *mărimi geometrice și mecanice care caracterizează sistemul material*. Acestea sînt: distanțe sau unghiuri, care caracterizează forma geometrică a corpului considerat, masa corpului, momentul său de inerție. În general, aceste mărimi sînt cunoscute, afară de cazuri speciale cînd se cere valoarea uneia dintre ele pentru ca sistemul material considerat să aibă o mișcare dată.

Acestea sînt mărimile care intervin în studiul mișcării unui sistem material față de un sistem de referință fix.

Într-o problemă de dinamică, mărimile arătate mai sus se împart în două mari categorii: *date și necunoscute*. În principiu, oricare dintre mărimile de mai sus poate juca într-o problemă de dinamică atît rolul de dată cît și rolul de necunoscută; totuși în problemele practice curente, care sînt de tipul mixt, există o anumită împărțire a acestor mărimi între date și necunoscute, care se păstrează în general aceeași, cu foarte mici excepții.

Trebuie remarcat cu această ocazie faptul că există anumite probleme de dinamică în care nu se cer valorile tuturor necunoscutelor din problema respectivă; astfel, există probleme de dinamică în care se cere numai mișcarea sistemului material considerat, fără a se cere și valorile reacțiunilor. În asemenea cazuri va trebui să alegem dintre metodele care vor fi expuse în acest capitol numai pe acelea care conduc cel mai repede la rezultat, fără a complica în mod inutil problema respectivă.

În general, din punctul de vedere al datelor și al necunoscutelor, o problemă de dinamică se prezintă sub următorul aspect (cazul studiului mișcării unui corp față de un sistem de referință fix):

*Date:*

— mărimi ce caracterizează forțele date aplicate sistemului material: module ale forțelor, distanțe, unghiuri;

— mărimi geometrice și mecanice ce caracterizează sistemul material: distanțe, unghiuri, mase, momente de inerție;

— mărimi geometrice și cinematice ce caracterizează mișcarea sistemului în momentul începerii sale (condiții inițiale): distanțe, unghiuri, viteze liniare și unghiulare (valorile lor constante din momentul inițial).

*Necunoscute:*

— mărimi ce caracterizează mișcarea sistemului material la un moment dat: distanțe, unghiuri, viteze liniare, vi-

teze unghiulare, accelerații liniare, accelerații unghiulare (valorile lor variabile din timpul mișcării);

— mărimi ce caracterizează forțele necunoscute aplicate sistemului material (distanțe, unghiuri, module); aci intră în general reacțiunile în cazul sistemelor cu legături.

Tabela 10.1

Datele și necunoscutele unei probleme de dinamică

Date	Forțe Mărimi geometrice și mecanice	
	Condiții inițiale	
Necunoscute	Mișcare	
	Reacțiuni	

Cele expuse pînă aci le vom concretiza la începutul fiecărei probleme prin alcătuirea unei tabele prescurtate (tabela 10.1).

## 2. Teorema energiei cinetice

a) **Punctul material.** Să considerăm un punct material  $M$  de masă  $m$  acționat de o forță  $F$ , rezultanta tuturor forțelor care se exercită asupra lui (fig. 10.1); sub acțiunea forței  $\bar{F}$ , punctul  $M$  parcurge pe traiectoria lui  $c$ , într-un timp  $\Delta t$ , o porțiune  $\Delta s = MM'$ . În acest timp, forța  $\bar{F}$  efectuează un lucru mecanic:

$$\Delta L = \bar{F} \Delta s \cos \alpha. \quad (10.1)$$

Ținînd seama de ecuația fundamentală a dinamicii (principiul al doilea):

$$\bar{F} = ma,$$

lucrul mecanic efectuat de forța  $F$  se mai scrie:

$$\Delta L = ma \Delta s \cos \alpha = m \Delta s a \cos \alpha.$$

Dar mărimea  $a \cos \alpha$  reprezintă proiecția vectorului  $\bar{a}$  pe coarda  $MM_1$ , care la limită devine tangentă la traiectorie în  $M$ ; ea arată cum variază mărimea vitezei  $v$ :

$$a \cos \alpha = a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

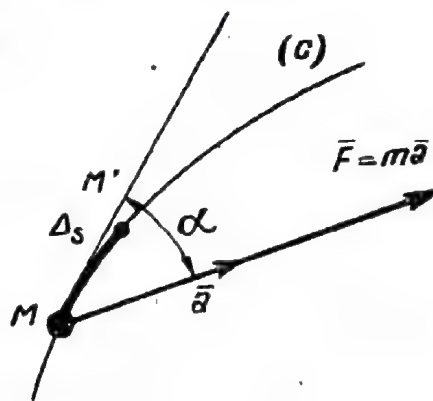


Fig. 10.1.

Din formula (6.16), elementul de arc  $ds$  mai poate fi scris și sub forma :

$$\Delta s = v \Delta t.$$

Înlocuind în (10.1) obținem :

$$\Delta L = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot v \Delta t = mv \Delta v. \quad (10.2)$$

Să calculăm acum care este variația energiei punctului când viteza sa crește de la valoarea  $v$  din momentul  $t$  la valoarea  $v + \Delta v$  din momentul  $t + \Delta t$ ; vom avea:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m (v + \Delta v)^2 - \frac{1}{2} m v^2 = mv \Delta v + \frac{1}{2} m (\Delta v)^2.$$

Dacă intervalul de timp  $\Delta t$  este destul de mic, termenul al doilea din expresia lui  $\Delta E_c$  este și el destul de mic și poate fi neglijat, așa încât vom avea :

$$\Delta E_c = mv \Delta v.$$

Comparînd acest rezultat cu cel dat de formula (10.2) obținem :

$$\Delta L = \Delta E_c. \quad (10.3)$$

Dacă timpul  $\Delta t$  este un infinit mic ( $\Delta t = dt$ ), formula (10.3) se mai scrie :

$$dL = dE_c.$$

Această expresie reprezintă *teorema variației energiei cinetice*; ea se enunță astfel : *variația energiei cinetice a unui punct material în intervalul de timp  $\Delta t$  este egală cu lucrul mecanic efectuat în același interval de timp de către rezultanta forțelor care acționează punctul.*

Dacă intervalul de timp este finit, variația energiei cinetice se calculează efectuînd diferența valorilor energiei cinetice din poziția finală și poziția inițială, iar lucrul mecanic se calculează după una dintre formulele (9.3), (9.4). Teorema energiei cinetice se scrie în acest caz :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = L_{A-B}, \quad (10.4)$$

unde s-a notat prin  $A$  și  $B$  cele două poziții (inițială și finală) ale punctului.



b) **Solidul rigid și sistemul de solide rigide.** Să considerăm acum un sistem material oarecare (solid rigid, sistem de solide rigide) aflat în mișcare, supus la acțiunea a diferite forțe exterioare date și de legătură precum și la acțiunea a diferite forțe interioare, aflat în două poziții  $A$  și  $B$ , și anume: în poziția  $A$  la un timp  $t_A$ , iar în poziția  $B$  la un timp  $t_B$  ( $t_B > t_A$ ). Pentru fiecare punct material care alcătuiește sistemul considerat se poate scrie o relație de forma (10.4):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 &= L_{1A-B}, \\ \frac{1}{2} m_2 v_{2B}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2A}^2 &= L_{2A-B}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{2} m_n v_{nB}^2 - \frac{1}{2} m_n v_{nA}^2 &= L_{nA-B}.\end{aligned}$$

Dacă adunăm toate aceste relații obținem:

$$\begin{aligned}&\left( \frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2B}^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_{nB}^2 \right) - \\ &- \left( \frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2A}^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_{nA}^2 \right) = \\ &= L_{1A-B} + L_{2A-B} + \dots + L_{nA-B}\end{aligned}$$

sau prescurtat:

$$\Sigma \frac{1}{2} m v_B^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_A^2 = L_{A-B}. \quad (10.5)$$

Dar  $\Sigma \frac{1}{2} m v_B^2 = E_B$  reprezintă energia cinetică totală a sistemului în poziția  $B$ ,  $\Sigma \frac{1}{2} m v_A^2 = E_A$  reprezintă energia cinetică a sistemului în poziția  $A$ , iar  $L_{A-B}$  reprezintă suma lucrurilor mecanice ale tuturor forțelor exterioare (forțe date și forțe de legătură) precum și ale forțelor interioare efectuate între cele două poziții  $A$  și  $B$ .

Relația (10.5) se scrie deci:

$$E_B - E_A = L_{AB} \quad (10.6)$$

și se exprimă astfel: *variația energiei cinetice a unui sistem material între două poziții (configurații) ale acestui sistem este egală cu lucrul mecanic efectuat de toate forțele exterioare și interioare care acționează sistemul între aceleași două poziții.*

În cazul solidului rigid, forțele interioare nu dau lucru mecanic, iar energia totală a unui sistem de corpuri rigide aflat în mișcare se calculează însumând energiile cinetice ale corpurilor care alcătuiesc sistemul.

c) **Indicații metodice privind aplicarea teoremei energiei cinetice.** Aplicarea teoremei energiei cinetice la rezolvarea problemelor de dinamica sistemelor materiale se face urmărind în general o anumită ordine, și anume :

- se stabilesc cele două poziții  $A$  și  $B$  ale sistemului;
- se stabilesc mișcările tuturor corpurilor sistemului precum și distribuțiile de viteze în cele două poziții  $A$  și  $B$ ; în general, trebuie exprimate vitezele tuturor corpurilor ca funcții de una sau mai multe viteze alese drept necunoscute;
- se alege expresia energiei cinetice corespunzătoare mișcării fiecărui corp în parte și se particularizează pentru cele două poziții  $A$  și  $B$ ; însumând rezultatele, se obțin mărimile  $E_A$  și  $E_B$ ;
- se figurează toate forțele exterioare și se calculează deplasările punctelor de aplicație ale forțelor; se calculează apoi lucrul mecanic al fiecărei forțe pe drumul parcurs din poziția  $A$  pînă în poziția  $B$ ; însumând rezultatele se obține lucrul mecanic total  $L_{A-B}$ ;
- se introduc mărimile  $E_A$ ,  $E_B$  și  $L_{A-B}$  în formula (10.6) și se rezolvă ecuația astfel obținută.

Rezolvarea problemelor se poate face folosind tabela 10.2

*Tabela 10.2*

**Tabelă pentru rezolvarea problemelor cu teorema energiei cinetice**

Corpul	Distribuția de viteze	Energia cinetică		Forțe exterioare	Deplasările punctelor de aplicație	Lucrul mecanic $L_{A-B}$
		în poziția $A$	în poziția $B$			
1 2				$F_1$ $F_2$		

**Exemplu.** Se cere să se studieze mișcarea sistemului din figura 10.2 care pleacă din repaus, neglijând frecările.

Sistemul se compune din trei corpuri rigide : un scripete și două greutatea ; a determina mișcarea sistemului înseamnă a determina mișcarea fiecărui corp care intră în alcătuirea sa.

Sistemul are un singur grad de libertate ; aceasta înseamnă că un singur parametru geometric sau o singură viteză caracterizează mișcarea întregului sistem, restul vitezelor exprimându-se în funcție de cea aleasă ca necunoscută.

Datele și necunoscutele sînt arătate în tabela 10.3.

*Tabela 10.3*

Datele și necunoscutele problemei

Date	Forțe	$P, Q, G$
	Mărimi geometrice și mecanice	$J, R, r$
	Condiții inițiale	la $t = 0$ } toate vitezele, distanțele și unghiurile sînt nule
Necunoscute	Mișcare	viteza $\bar{v}$ , accelerația $\bar{a}$ sau deplasarea $h$ a greutății $P$
	Reacțiuni	$T_1, T_2, X, Y$ (tensiunile din fire și reacțiunile din axa scripetelui)

Pentru rezolvare, vom urmări ordinea indicată mai sus :

— Cele două poziții ale sistemului sînt : poziția de repaus din care pleacă ( $A$ ), desenată continuu pe figura 10.2, și o altă poziție în timpul mișcării ( $B$ ), desenată punctat pe aceeași figură. În poziția  $A$ , greutatea  $P$  și  $Q$  se află desenate plin ; poziția scripetelui este marcată printr-o rază desenată de asemenea plin. Poziția  $B$  este o poziție oarecare de timpul mișcării ; în această poziție greutatea  $P$  s-a deplasat față de poziția  $A$  cu distanța  $h$ , scripetele s-a rotit față de poziția  $A$  cu unghiul  $\theta$ , iar greutatea  $Q$  s-a deplasat față de poziția  $A$  cu distanța  $h_1$ .

— Cele trei corpuri au următoarele mișcări :

— greutatea  $P$  are o mișcare de translație rectilinie pe verticală cu viteza  $v$  ;  $v_A = 0$ ,  $v_B = v$  ;



— scripetele are o mișcare de rotație în jurul unei axe fixe trecând prin  $O$  și perpendiculară pe planul său, cu viteza unghiulară  $\omega$ ;

$$\omega_A = 0, \omega_B = \omega;$$

— greutatea  $Q$  are o mișcare de translație rectilinie pe verticală cu viteza  $v_1$ ;  $v_{1A} = 0, v_{1B} = v_1$ .

Deoarece sistemul are un singur grad de libertate, vitezele tuturor punctelor sistemului se exprimă ca funcție numai de o singură viteză, aleasă drept necunoscută; alegînd drept necunoscută viteza  $v$  și exprimînd faptul că vitezele celor două fire care susțin greutatea sînt egale cu cele ale punctelor de pe scripete, obținem :

$$v = R\omega; \quad v_1 = r\omega,$$

de unde :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v}{R}, \\ v_1 &= \frac{r}{R} v. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Expresiile energiei cinetice alese după mișcările corpurilor care compun sistemul sînt :

— pentru greutatea  $P$  și  $Q$  aflate în mișcare de translație avem :

$$E = \frac{1}{2} M v^2;$$

— pentru scripetele aflate în mișcare de rotație :

$$E = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

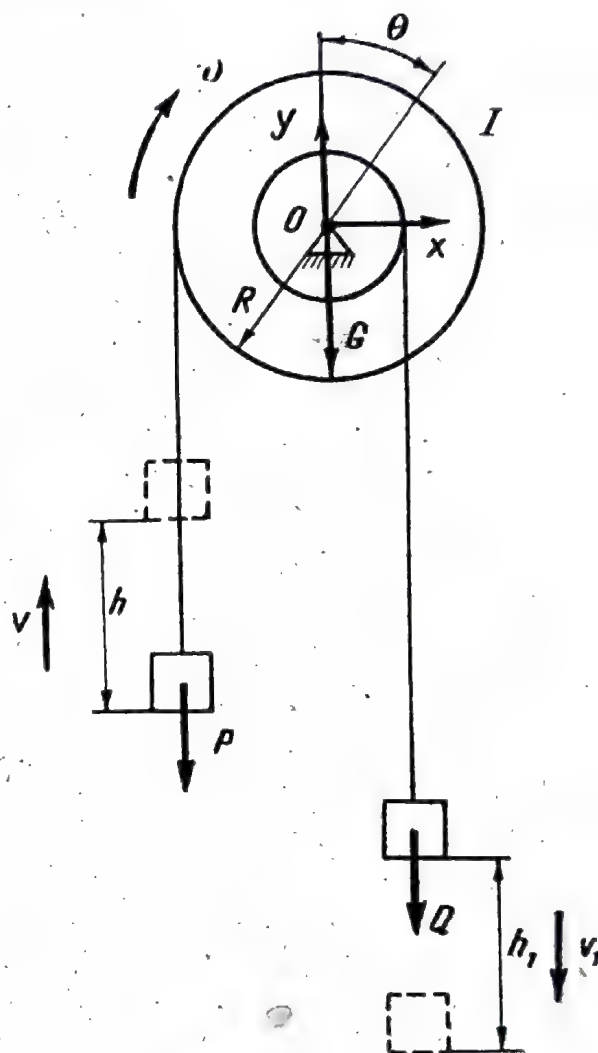


Fig. 10.2.

Energiile fiecărui corp pentru cele două poziții au următoarele valori:

— pentru greutatea  $P$ :

$$E_A = \frac{1}{2} M v_A^2 = 0; \quad E_B = \frac{1}{2} M v_B^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2;$$

— pentru scripete:

$$E_A = \frac{1}{2} J \omega_A^2 = 0; \quad E_B = \frac{1}{2} J \omega_B^2 = \frac{1}{2} J \frac{v^2}{R^2};$$

— pentru greutatea  $Q$ :

$$E_A = \frac{1}{2} M_1 v_{1A}^2 = 0; \quad E_B = \frac{1}{2} M_1 v_{1B}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \frac{r^2}{R^2} v^2.$$

Însumînd energiile, obținem energia întregului sistem:

$$E_A = 0,$$

$$E_B = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 + \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \frac{r^2}{R^2} v^2 + \frac{1}{2} J \frac{v^2}{R^2} = \frac{v^2}{2g} \left( P + Q \frac{r^2}{R^2} + \frac{J}{R^2} \right).$$

Forțele exterioare care acționează sistemul sînt în număr de cinci:

$$P, Q, G, X, Y.$$

Deplasările punctelor de aplicație ale acestor forțe sînt:

- deplasarea punctului de aplicație al forței  $P$  este  $h$ ;
- deplasarea punctului de aplicație al forței  $Q$  este  $h_1$ ;
- deplasarea punctului comun de aplicație al forțelor  $G, X, Y$  este nulă.

Deoarece sistemul are un singur grad de libertate, deplasările tuturor punctelor sistemului se exprimă ca funcții numai de o singură deplasare aleasă drept necunoscută; alegînd drept necunoscută deplasarea greutății  $P$  (a cărei viteză am ales-o drept necunoscută) și exprimînd faptul că deplasările celor două fire care susțin greutatea sînt egale cu cele ale punctelor de pe scripete, obținem:

$$h = R\theta, \quad h_1 = r\theta,$$

de unde:

$$\theta = \frac{h}{R}, \quad h_1 = \frac{r}{R} h. \quad (10.8)$$

Observăm că relațiile dintre deplasări se obțin înlocuind, în relațiile dintre viteze, vitezele prin deplasări.

Lucrurile mecanice ale celor cinci forțe exterioare care acționează sistemul în deplasarea sa din poziția  $A$  în poziția  $B$  sînt:

— lucrul mecanic al forței  $P$ :  $L_{A-B} = -Ph$  [formula (9.6)];

— lucrul mecanic al forței  $Q$ :  $L_{A-B} = Qh_1 = Q \frac{r}{R} h$  [formula (9.6)];

— lucrurile mecanice ale forțelor  $G$ ,  $X$ ,  $Y$ :  $L_{A-B} = 0$ .

Lucrul mecanic al forțelor interioare este nul deoarece corpurile sînt rigide, iar firele inextensibile.

Însumînd rezultatele, obținem lucrul mecanic total:

$$L_{A-B} = -Ph + Q \frac{r}{R} h = \left( Q \frac{r}{R} - P \right) h.$$

Înlocuind rezultatele în formula (10.6) obținem:

$$\frac{v^2}{2g} \left( P + Q \frac{r^2}{R^2} + \frac{Jg}{R^2} \right) = \left( Q \frac{r}{R} - P \right) h,$$

de unde:

$$v = \sqrt{\frac{2g \left( Q \frac{r}{R} - P \right) h}{P + Q \frac{r^2}{R^2} + \frac{Jg}{R^2}}}.$$

Se observă că viteza greutății  $P$  este variabilă cu distanța  $h$ . Dacă se notează:

$$a = \frac{g \left( Q \frac{r}{R} - P \right)}{P + Q \frac{r^2}{R^2} + \frac{Jg}{R^2}},$$

valoarea lui  $v$  se mai scrie:

$$v = \sqrt{2ah},$$

care comparată cu formula (5.12) arată că  $a$  este accelerația mișcării de translație rectilinie a greutății  $P$ , care este constantă. Rezultă de aci că greutatea  $P$  are o mișcare rectilinie uniform variată; legile de mișcare ale celor trei corpuri componente ale sistemului sînt:

$$h = \frac{1}{2} at^2; \theta = \frac{h}{R} = \frac{1}{2R} at^2,$$

$$h_1 = \frac{r}{R} h = \frac{r}{2R} at^2.$$

Cu aceasta, mișcarea întregului sistem este complet determinată.



În cazul particular  $a = 0$ , rezultă  $h = 0 = h_1 = 0$ , adică sistemul rămîne în reapus; aceasta este condiția de echilibru static. Calculul efectuat la acest exemplu poate fi rezumat în tabela 10.4.

Tabela 10.4.

Rezultatele calculelor în cazul mișcării unui sistem

Corpul	Distribuția de viteze	Energia cinetică		Forțe exterioare	Deplasările punctelor de aplicație	Lucrul mecanic
		În poziția A	În poziția B			
1	Translație rectilinie cu viteza $v$	$E_A = 0$	$E_B = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2$	$P$	$h$	$-Ph$
2	Rotație în jurul unei axe fixe cu viteza unghiulară $\omega = \frac{v}{R}$		$E_B = \frac{1}{2} J \frac{v^2}{R^2}$	$Q$	$h_1 = \frac{r}{R} h$	$Q \frac{r}{R} h$
				$G$	0	0
				$X$	0	0
	Translație rectilinie cu viteza $v_1 = \frac{r}{R} v$		$E_B = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \frac{r^2}{R^2} v^2$	$Y$	0	0

d) **Legea conservării energiei.** Să considerăm o minge elastică atârnată printr-un fir în punctul A situat la distanța  $h$  deasupra pământului (fig. 10.3, a). Dacă tăiem firul și lăsăm corpul să cadă, el va căpăta o viteză din ce în ce mai mare pînă ce va atinge solul în punctul B; dacă nu există nici un fel de frecări, după ciocnirea din B el va căpăta o viteză orientată de la B către A care va scădea din ce în ce pînă ce corpul va ajunge din nou în punctul A și mișcarea se va repeta în același mod la nesfîrșit. Același fenomen se petrece și în cazul pendulului din figura 10.3, b sau al greutății atârnată de resort (fig. 10.3, c); toate aceste corpuri execută mișcări oscilatorii (în primul caz, mișcarea oscilatorie este combinată și cu o ciocnire) care, în absența oricărei pierderi de energie prin frecare cu mediul înconjurător, nu se amortizează niciodată. În timpul acestor mișcări, variază atît viteza corpului, cît și poziția sa în raport cu solul, adică variază atît energia sa cinetică cît și energia potențială; într-adevăr, în toate cele trei cazuri considerate

în figura 10.3, pozițiile  $A$  sînt caracterizate prin viteză nulă (deci energie cinetică nulă) și energie potențială maximă (în fig. 10.3,  $a$  și  $b$ ); energia potențială este datorită numai poziției corpului, pe cînd în figura 10.3,  $c$ , energia potențială este datorită

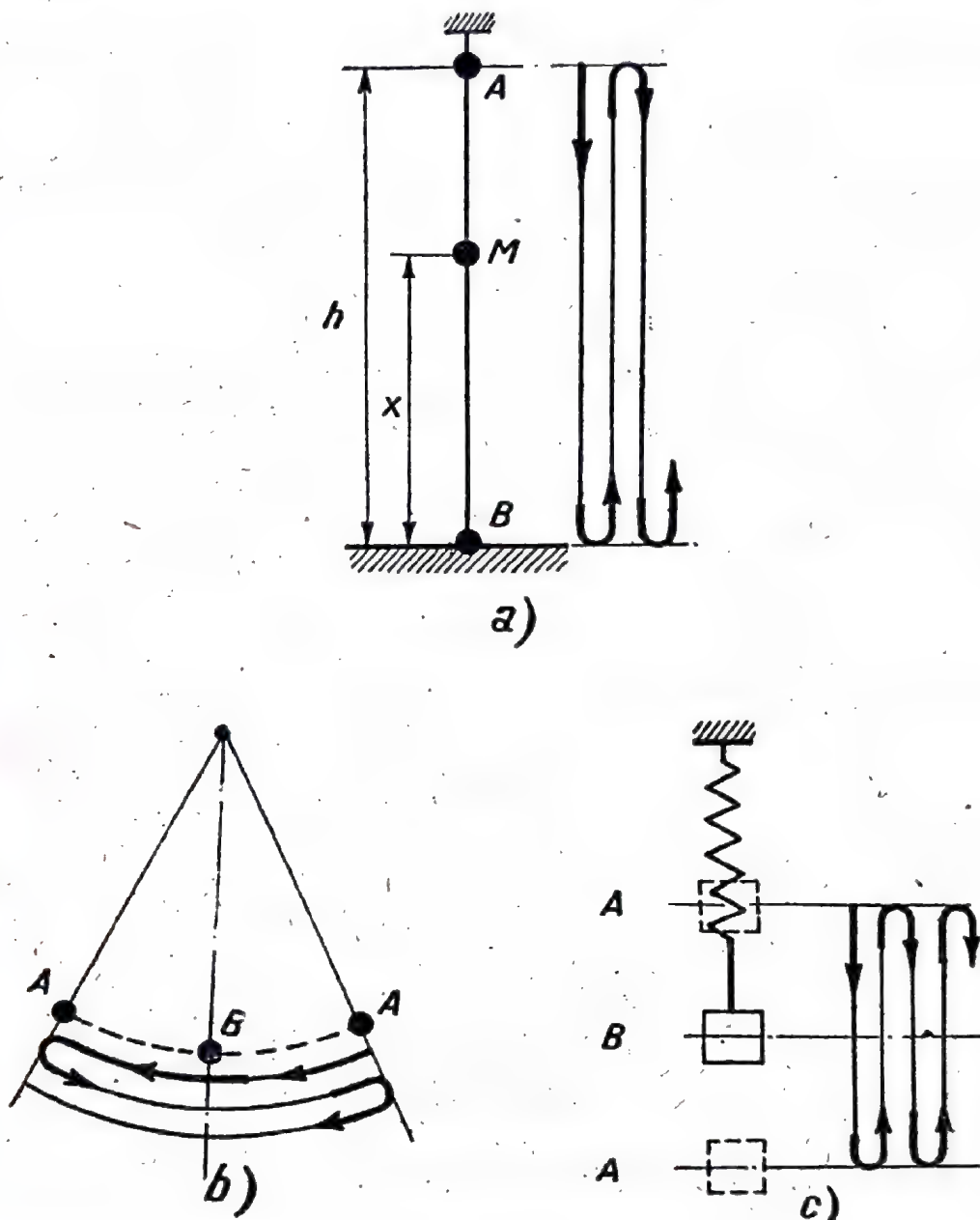


Fig. 10.3.

atît poziției corpului cît și acelei a resortului; de aceea, în figura 10.3,  $a$  și  $b$  pozițiile  $A$  sînt situate la înălțimea cea mai mare deasupra solului, pe cînd în figura 10.3,  $c$  aceasta nu se mai întîmplă; pozițiile  $B$  sînt caracterizate prin energia potențială minimă și viteza maximă, deci energia cinetică maximă.

Să calculăm pentru exemplul din figura 10.3,a care este valoarea energiei cinetice și a energiei potențiale într-o poziție oarecare  $M$  situată între pozițiile  $A$  și  $B$ ; dacă notăm prin  $x$  depărtarea punctului  $M$  de sol și prin  $m = \frac{G}{g}$  masa corpului, avem :

$$E_p = Gx, \quad E_c = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2,$$

$v$  fiind viteza mobilului în  $M$ ; viteza  $v$  se poate calcula cu ajutorul formulei (5.12) :

$$v = \sqrt{2g(h-x)},$$

cu care :

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{G}{g} 2g(h-x) = G(h-x).$$

Energia potențială maximă a corpului se află în poziția  $A$  unde  $x=h$ ; ea are valoarea :

$$E_{p \max} = Gh,$$

iar energia cinetică maximă se află în poziția  $B$ , unde  $x=0$  și are valoarea :

$$E_{c \max} = \frac{1}{2} \frac{G}{g} (\sqrt{2gh})^2 = Gh.$$

Energia mecanică a corpului este :

$$E_m = E_p + E_c = Gx + G(h-x) = Gh = \text{const.}$$

Din cele de mai sus deducem următoarea constatare importantă : *în tot timpul mișcării, energia mecanică a corpului este constantă și egală cu valoarea maximă a energiei potențiale sau cu valoarea maximă a energiei cinetice :*

$$E_m = E_c + E_p = \text{const.} = E_{p \max} = E_{c \max}. \quad (10.9)$$

Cu alte cuvinte, energia totală mecanică a corpului nu se mărește și nu se micșorează ci se conservă în tot timpul mișcării. În mișcarea descendentă a corpului de la  $A$  către  $B$ , energia potențială scade, în timp ce energia cinetică crește, astfel încît scăderea energiei potențiale este compensată, suma lor rămânînd constantă. În mișcarea ascendentă, fenomenul se inversează : energia cinetică scade în timp ce energia potențială crește, trecînd prin aceleași valori ca în cazul căderii.



Din punct de vedere practic se constată că fenomenul căderii corpului reprezentat în figura 10.3, *a* nu se repetă la infinit, ci după câteva mișcări în care înălțimea *h* scade din ce în ce, el se oprește în punctul *B*; în această situație, energia sa mecanică este nulă. Rezultă de aci că energia mecanică nu s-a conservat, ci s-a consumat în timpul mișcării. Aceasta se explică prin aceea că în calculul pe care l-am efectuat nu am ținut seama de o serie de pierderi de energie prin frecare cu aerul, prin deformarea din punctul *B* și în general de o serie de fenomene (degajare de căldură, fenomene luminoase etc.) care însoțesc ciocnirea din *B*.

Formula (10.9) nu este valabilă decât într-un spațiu în care fenomenele enumerate nu au loc. Consumarea energiei mecanice nu se face însă cu pierderi ci cu transformări în alte energii, ca : energie calorică, luminoasă, electrică, magnetică, energii care se produc o dată cu mișcarea mecanică.

De aceea, în universul nostru real legea conservării energiei se prezintă sub următoarea formă mai generală : suma tuturor energiilor (cinetică, potențială, termică, electrică, magnetică) este constantă pentru un sistem izolat aflat în mișcare :

$$E_p + E_c + W = \text{const.}, \quad (10.10)$$

unde s-a notat prin *W* energiile termică, electrică, magnetică etc.

Relația (10.10) este valabilă dacă sistemul considerat nu este acționat de forțe exterioare care ar mări sau micșora energia totală.

Din relația (10.10) mai rezultă că cu timpul *E<sub>p</sub>* și *E<sub>c</sub>* cresc, iar *W* crește, ceea ce conduce (în cazul sistemului izolat) la oprirea mișcării; de aci rezultă imposibilitatea realizării unui perpetuum mobile.

### 3. Teorema impulsului

a) **Punctul material.** Să considerăm un punct material de masă *m* aflat în mișcare rectilinie cu viteza *v* și accelerația *a*, acționat de o forță *F* pe direcția mișcării sale. Conform principiului al doilea al mecanicii, avem :

$$F = ma. \quad (10.11)$$

Membrul al doilea al acestei expresii mai poate fi scris însă și sub forma :

$$m a = m \frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dh}{dt}, \quad (10.12)$$

deoarece masa  $m$  este o constantă; produsul  $mv$  reprezintă impulsul  $h$  al punctului  $M$ . Egalând între ele expresiile (10.11) și (10.12) obținem :

$$\frac{dh}{dt} = ma = F, \quad (10.13)$$

adică derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu rezultanta forțelor exterioare care acționează punctul.

b) **Solidul rigid și sistemul de solide rigide.** După cum am văzut, impulsul unui solid rigid are aceeași formă ca și impulsul unui punct material, cu deosebirea că  $m$  reprezintă masa întregului corp, iar  $a$  reprezintă accelerația centrului său de greutate. Dacă considerăm mișcarea centrului de greutate al solidului căruia îi atribuim ca forță care-l acționează rezultanta forțelor aplicate solidului, teorema impulsului pentru acest punct se scrie :

$$\frac{dH}{dt} = Ma_G = F, \quad (10.14)$$

adică derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui corp este egală cu rezultanta forțelor exterioare care acționează corpul.

În proiecții pe axele unui triedru cartezian, ecuația (10.14) se transformă în următoarele relații scalare :

$$Ma_{Gx} = F_x,$$

$$Ma_{Gy} = F_y,$$

$$Ma_{Gz} = F_z.$$

c) **Legea conservării impulsului.** Să presupunem că asupra unui punct material nu acționează nici o forță ; în acest caz, derivata impulsului său, după formula (10.12), este nulă :

$$\frac{dh}{dt} = 0 \quad (10.15)$$

Aceasta înseamnă că impulsul  $h$  este constant, deoarece nu mai derivata unei constante e nulă :

$$h = \text{constant}, \quad (10.16)$$

sau altfel spus :

$$mv = \text{constant.} \quad (10.17)$$

Această concluzie se păstrează și în cazul mai multor puncte sau în cazul unui solid rigid. Spre exemplu, pentru cazul a două puncte de mase  $m_1$  și  $m_2$  avînd mișcări rectilinii pe aceeași axă, cu vitezele  $v_1$  și  $v_2$ , teorema conservării impulsului se scrie :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{constant.} \quad (10.18)$$

#### 4. Metoda cinetostatică (metoda lui d'Alembert)

a) **Punctul material.** Să considerăm un punct material  $M$  supus acțiunii unei forțe  $\bar{F}$  (rezultanta forțelor exterioare date și de legătură care acționează punctul). Conform principiului al doilea al mecanicii avem :

$$\bar{F} = m\bar{a}. \quad (10.19)$$

Vom presupune că  $\bar{F} \neq 0$  și deci și  $\bar{a} \neq 0$ .

Să trecem totul în membrul I al relației (10.19); obținem :

$$\bar{F} + (-m\bar{a}) = 0. \quad (10.20)$$

Dar  $-m\bar{a} = \bar{F}_i$ , este forța de inerție a punctului considerat ; avem deci :

$$\bar{F} + \bar{F}_i = 0. \quad (10.21)$$

sau dacă includem și forța de inerție printre celelalte forțe care acționează punctul, obținem :

$$\Sigma \bar{F} = 0, \quad (10.22)$$

adică o ecuație analogă cu aceea obținută în cazul echilibrului punctului material. Deosebirea dintre aceste ecuații constă în aceea că pe cînd ecuația din statică exprimă echilibrul real al punctului material supus la acțiunea unor forțe care-i sînt aplicate, ecuația (10.22) exprimă echilibrul punctului  $M$  sub acțiunea unor forțe care nu-i sînt toate aplicate lui ; într-adevăr, după cum am văzut, forța de inerție este aplicată în mod convențional punctului  $M$ , căci în realitate ea acționează asupra corpului care pune punctul în mișcare. De aceea vom spune că ecuația (10.22) este o ecuație de echilibru fictiv dinamic (sau



formal), pe cînd ecuația corespunzătoare din statică reprezintă o ecuație de echilibru real. Într-adevăr, dacă echilibrul punctului  $M$  ar fi real, conform principiului inerției, punctului s-ar afla în repaus sau s-ar mișca rectiliniu și uniform, deci  $a=0$ , ceea ce contravine ipotezei făcute la începutul acestui paragraf.

Rezultatul obținut mai sus poate fi enunțat astfel: *în mișcarea unui punct material, în orice moment, forțele date, forțele de legătură și forța de inerție își fac echilibru.*

Metoda de rezolvare a problemelor de dinamică bazată pe acest principiu se numește *metoda cinetostatică* sau *principiul lui d'Alembert*.

**b) Solidul rigid și sistemul de solide rigide.** Dacă în locul unui singur punct material vom considera un solid rigid, fiecare moleculă a corpului, considerată ca un punct, material, se va afla în fiecare moment al mișcării în echilibru dinamic și deci întregul corp se va afla în echilibru dinamic la momentul considerat. Adunînd între ele relațiile de forma (10.21) găsim:

$$\Sigma \bar{F} + \Sigma \bar{F}_i = 0 \text{ sau } \Sigma \bar{F} = 0, \quad (10.23)$$

precum și ecuația:

$$\Sigma \bar{M}_o + \Sigma \bar{M}_{i,o} = 0 \text{ sau } \Sigma \bar{M}_o = 0. \quad (10.24)$$

Dar  $\Sigma \bar{F}$  și  $\Sigma \bar{M}_o$  reprezintă elementele de reducere ale forțelor date și de legătură în raport cu punctul  $O$ , iar  $\Sigma \bar{F}_i$  și  $\Sigma \bar{M}_{i,o}$  reprezintă elementele de reducere ale forțelor de inerție ale corpului în raport cu același punct. Acestea sînt ecuațiile de echilibru fictiv dinamic al solidului rigid aflat în mișcare. Acest rezultat este valabil și pentru un sistem de solide rigide.

Principiul lui d'Alembert în forma lui generală poate fi deci enunțat astfel: *un punct material, un solid rigid sau un sistem de solide rigide se află în fiecare moment în echilibru fictiv, dinamic, sub acțiunea forțelor exterioare date și de legătură, precum și sub acțiunea forțelor de inerție.*

Metoda aceasta a echilibrului fictiv dinamic a fost introdusă în mecanică de către învățatul francez Jean le Rond d'Alembert; ea constituie o metodă simplă și foarte des întrebuințată pentru studiul mișcării sistemelor materiale.

Cu ajutorul metodei lui d'Alembert orice problemă de dinamică se transformă într-o problemă de statică, adăugînd pe lîngă forțele și cuplurile din statică forțele și cuplurile de inerție.

c) **Indicații metodice privind aplicarea metodei lui d'Alembert.** Metoda cinetostatică servește atât la studiul mișcării cât și la determinarea reacțiunilor dinamice. Aplicarea ei la rezolvarea problemelor de dinamică se face urmărind în general următoarea ordine :

— se separă corpurile și se figurează forțele și cuplurile din statică (forțele și cuplurile date sau provenind din eliberarea corpurilor de legături) ;

— se stabilesc mișcările tuturor corpurilor sistemului, precum și distribuția accelerațiilor în poziția considerată ; în general, accelerațiile tuturor corpurilor se exprimă ca funcții de una sau mai multe accelerații alese drept necunoscute ;

— se aleg elementele de inerție (forțe și cupluri) după mișcarea pe care o au corpurile care alcătuiesc sistemul și se figurează pe fiecare corp în parte ;

— se scriu ecuațiile de echilibru fictiv dinamic ; acestea sînt aceleași ecuații ca în cazul static. Se rezolvă sistemul de ecuații și se determină mișcarea sistemului și reacțiunilor legăturilor.

**Exemplu.** Se cere să se studieze mișcarea și să se determine reacțiunile sistemului reprezentat în figura 10. 2 ; frecările se vor neglija.

Pentru rezolvare vom urmări ordinea indicată mai sus.

Se separă corpurile și se figurează forțele și cuplurile din statică ; acestea sînt (fig. 10.4) date în tabela 10.5.

**Tabela 10.5**

**Forțele date și forțele de legătură**

Corpul	Forțe date	Forțe de legătură
Greutatea $P$	$P$	$T_1$
Scripetele	$G$	$X, Y, T_1, T_2$
Greutatea $Q$	$Q$	$T_2$

Mișcările, distribuțiile de accelerații și forțe și cuplurile de inerție ale celor trei corpuri sînt date în tabela 10.6.

Relațiile dintre accelerații au fost deduse derivînd expresiile vitezelor  $v = R\omega$  și  $v_1 = r\omega$  (fig. 10.5) :

$$a = R\varepsilon \quad a_1 = r\varepsilon,$$

de unde :

$$\varepsilon = \frac{a}{R} \quad a_1 = \frac{r}{R} a.$$

Forțele și cuplurile de inerție au fost calculate cu formulele corespunzătoare cazului de mișcare respectiv; ele sînt figurate punctat în sens invers accelerațiilor respective.

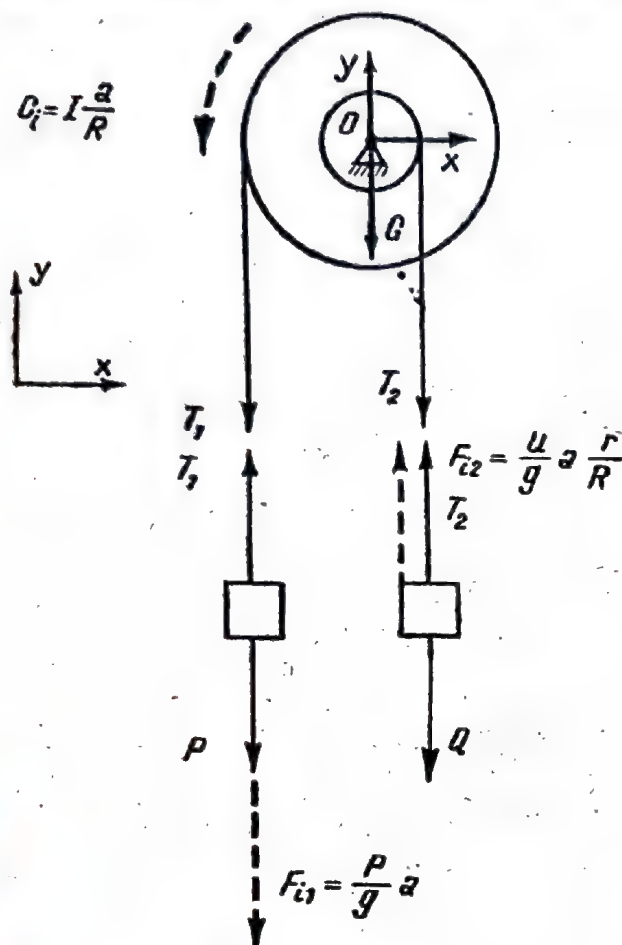


Fig. 10.4.

Ecuatiile de echilibru sînt :

— pentru greutatea  $P$

$$(\Sigma F_y = 0)$$

$$T_1 - P - \frac{P}{g} a = 0;$$

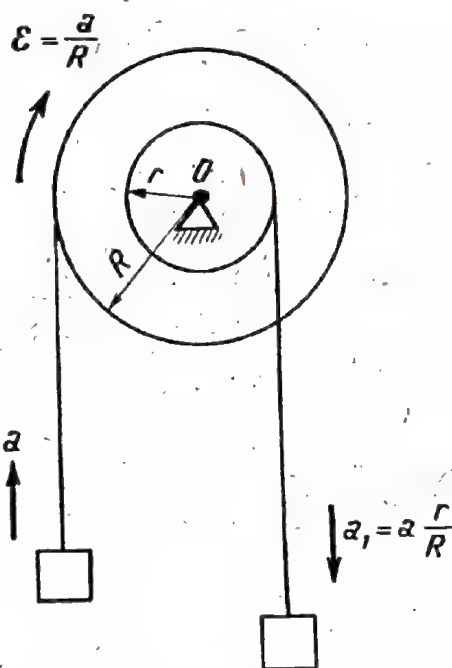


Fig. 10.5.

— pentru scripete :

$$(\Sigma F_x = 0) \quad X = 0,$$

$$(\Sigma F_y = 0) \quad -T_1 - G - T_2 + Y = 0,$$

$$(\Sigma M_o = 0) \quad T_1 R + I \frac{a}{R} - T_2 r = 0;$$

— pentru greutatea  $Q$  :

$$(\Sigma F_y = 0) \quad T_2 + \frac{Q}{g} a \frac{r}{R} - Q = 0.$$

Sistemul acestor ecuații are următoarele soluții :

$$a = g \frac{Q \frac{r}{R} - P}{P + Q \frac{r^2}{R^2} + \frac{I g}{R^2}} = \text{const.},$$



Tabela 10.6

## Forțe și cupluri de inerție

Corpul	Mișcarea	Forțe și cupluri de inerție
Greutatea $P$	Translație rectilinie cu accelerația $\bar{a}$	o forță de inerție $F_{i1} = \frac{P}{g} a$
Scripetele	Rotație în jurul unei axe fixe cu accelerația unghiulară $\varepsilon = \frac{a}{R}$	un cuplu de inerție $C_i = I \varepsilon = I \frac{a}{R}$
Greutatea $Q$	Translație rectilinie cu accelerația $a_1 = a \frac{r}{R}$	o forță de inerție $F_{i2} = \frac{Q}{g} a_1 = \frac{Q}{g} a \frac{r}{R}$

$$T_1 = P \left( 1 + \frac{a}{g} \right); X = 0; T_2 = T_1 \frac{R}{r} + I \frac{a}{Rr} =$$

$$= P \left( 1 + \frac{a}{g} \right) \frac{R}{r} + I \frac{a}{Rr};$$

$$Y = T_1 + T_2 + G = P \left( 1 + \frac{a}{g} \right) \left( \frac{R}{r} + 1 \right) + J \frac{a}{Rr} + G$$

În valorile reacțiunilor trebuie înlocuită valoarea lui  $a$ .

Cu aceasta, mișcarea sistemului și reacțiunilor sînt determinate; într-adevăr, cunoscînd accelerația  $a$ , se cunosc accelerațiile  $\varepsilon$  și  $a_1$ . Cele trei corpuri ale sistemului au mișcări uniform variate; legea lor de mișcare este de forma (5.10):

În cazul particular cînd:

$$Q \frac{r}{R} = P,$$

avem  $a=0$  și deci corpurile sistemului se află în repaus sau se mișcă în translație rectilinie și uniformă (greutățile  $P$  și  $Q$ ) sau se rotesc uniform (scripetele). Aceasta reprezintă condiția de echilibru a sistemului.

## Capitolul XI

# APLICAREA METODELOR GENERALE ȘI A PRINCIPIILOR MECANICII LA STUDIUL MIȘCĂRILOR PARTICULARE ALE PUNCTULUI MATERIAL ȘI SOLIDULUI RIGID

### 1. Dinamica punctului material

Primul și totodată cel mai simplu sistem material cu studiul mișcării căruia se ocupă dinamica este punctul material. După cum am mai arătat, cu ajutorul mișcării unui punct material putem aproxima mișcarea anumitor corpuri reale din natură.

Studiul mișcării punctului material prezintă în anumite cazuri dificultăți matematice foarte mari, care uneori nu au putut fi rezolvate în mod satisfăcător nici pînă în prezent.

În cele ce urmează ne vom preocupa numai de acele mișcări ale punctului material care pot fi încadrate în cele trei mari tipuri de mișcări studiate în cadrul cinematicii: mișcarea uniformă, mișcarea uniform variată și mișcarea oscilatorie armonică. Aceasta revine la a spune că vom studia numai acele mișcări pentru care parametrii geometrici care determină poziția momentană a punctului au expresii de forma celor care există în cazul mișcărilor menționate. Valorile constantelor  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$  din expresiile mărimilor geometrice  $q$  care caracterizează poziția punctului se determină cu ajutorul condițiilor inițiale.

Dintre metodele generale ale mecanicii pentru rezolvarea problemelor de dinamică, vom aplica în cazul mișcării punctului în special ecuația  $F = ma$  și teorema energiei cinetice.

a) **Punctul material liber.** Ne propunem să studiem mișcarea unui punct material liber, adică nesupus nici unei legături. În acest caz, datele și necunoscutele sînt:

Date :

- forțe : toate forțele care acționează punctul material într-o poziție oarecare a sa  $M(x, y, z)$  la un moment oarecare  $t$  ;
- mărimi geometrice și mecanice : masa  $m$  a punctului ;
- condiții inițiale : poziția punctului la momentul  $t = t_0$  al începerii mișcării  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  și viteza punctului  $v_0(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$  în această poziție ;

Necunoscute :

— mișcarea punctului material, caracterizată prin coordonatele sale  $x, y, z$  ca funcții de timp. O dată cunoscute aceste coordonate, se poate face un studiu cinematic al mișcării punctului determinând cele trei caracteristici ale mișcării sale : traiectoria și proiecțiile vitezei și accelerației punctului pe axele unui triedru cartezian.

În cazul punctului material liber nu există reacțiuni ; în unele probleme se poate cere însă să se determine anumite forțe necunoscute care acționează punctul, în scopul realizării unei mișcări date.

Metoda de bază în studierea mișcării punctului material o constituie aplicarea celor trei ecuații date de principiul al doilea al mecanicii. Anumite probleme simple în care nu se cer toate necunoscutele de mai sus pot fi rezolvate mai ușor prin aplicarea teoremei energiei cinetice.

b) **Punctul material supus la legături.** Pentru a studia mișcarea punctului material supus la legături, vom îndepărta mai întâi legăturile introducând în locul lor, așa cum am procedat și la statică, forțele de legătură. În urma acestei operații, punctul material devine liber și i se pot aplica cele trei ecuații ale teoremei impulsului, la fel ca în cazul punctului liber.

Legăturile în cazul mișcării punctului sînt aceleași ca în statică : simpla rezemare și prinderea cu fire sau bare. În cazul unui punct mobil pe o suprafață, forțele de legătură sînt o reacțiune normală pe suprafață, de modul necunoscut  $N$ , și o forță de frecare de modul  $\mu N$ , dirijată în sens invers vitezei punctului, iar în cazul firului și barei o forță de mărime necunoscută dirijată pe direcția firului sau barei.

Datele și necunoscutele problemelor sînt în general aceleași ca și în cazul punctului material liber, cu deosebirea că apar în plus drept necunoscute modulele forțelor de legătură.

Numărul ecuațiilor pentru rezolvarea problemelor este același : cele trei ecuații ale principiului al doilea al dinamicii.

Deoarece au apărut necunoscute în plus, s-ar părea că problemele de dinamica punctului material supus la legături sînt nedeterminate ; în realitate, din cauza legăturilor, coordonatele  $x, y, z$  ale punctului nu mai pot lua orice valori, ci sînt supuse la un număr de relații care se adaugă ecuațiilor mișcării. Aceste relații diferă de la caz la caz, după felul legăturii.



c) Mișcarea punctului material greu în vid și în aer. Aruncarea pe verticală. Să studiem mișcarea pe care o are un punct material liber de masă  $m$  aruncat pe verticală în vid cu viteza

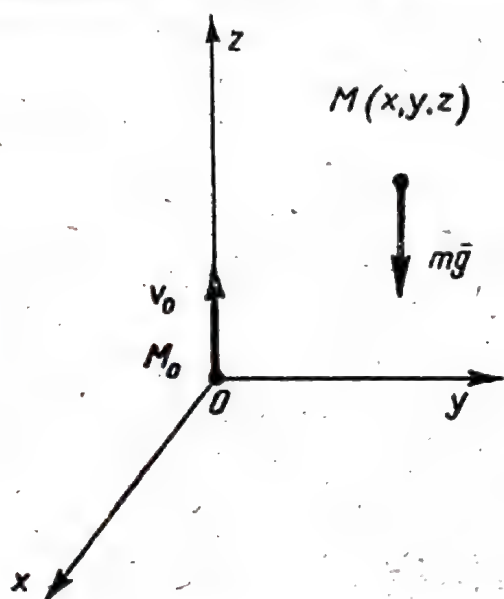


Fig. 11.1.

inițială  $v_0$  din originea axelor de coordonate. Vom presupune că nu cunoaștem dinainte faptul că acest punct se va deplasa numai pe verticală (fig. 11.1).

Pentru rezolvare, alegem un sistem de axe  $Oxyz$  avînd  $Oz$  ca axa verticală și stabilim datele și necunoscutele problemei conform tabelului 11.1.

Ecuațiile mișcării punctului sînt :

$$\begin{aligned} ma_x &= \Sigma F_x, \\ ma_y &= \Sigma F_y, \\ ma_z &= \Sigma F_z. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Singura forță care acționează punctul este greutatea sa  $m\bar{g}$ , care, pentru o poziție oarecare din timpul mișcării, are proiecțiile :

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = -mg. \quad (11.2)$$

Tabela 11.1

Date și necunoscute la mișcarea punctului material greu în vid

Date	Forțe	$m \bar{g}$	
	Mărimi geometrice și mecanice	$m$	
	Condiții inițiale	Poziția la $t = 0$	$x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$
		Viteza la $t = 0$	$v_{0x} = 0, v_{0y} = 0, v_{0z} = v_0$
Necunoscute	Mișcarea	$x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$	

Înlocuind în ecuațiile de mișcare, obținem :

$$\begin{aligned} ma_x &= 0, \\ ma_y &= 0, \\ ma_z &= -mg. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Simplificînd cu  $m$  obținem :

$$a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad a_z = -g. \quad (11.4)$$

Comparînd aceste ecuații cu ecuațiile (5.9) și (5.11), deducem că proiecțiile punctului studiat se mișcă pe axele  $Ox$ , și  $Oy$  uniform, iar pe axa  $Oz$  uniform întîrziat (acelerația  $a$  este constantă și negativă). Expresiile coordonatelor punctului mobil sînt date de formula (5.6) pentru  $x$  și  $y$  și de formula (5.10) pentru  $z$ :

$$\begin{aligned} x &= At + B, \\ y &= Ct + D, \\ z &= Et^2 + Ft + G, \end{aligned} \quad (11.5)$$

unde  $A, \dots, G$  sînt niște constante care vor fi determinate din condițiile inițiale date în problemă.

Dacă derivăm o dată aceste coordonate găsim proiecțiile vitezei punctului  $M$  pe axele sistemului  $Oxyz$ :

$$\begin{aligned} v_x &= A, \\ v_y &= C, \\ v_z &= 2Et + F. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Dacă mai derivăm încă o dată, găsim proiecțiile accelerației :

$$\begin{aligned} a_x &= 0, \\ a_y &= 0, \\ a_z &= 2E. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Comparînd între ele ultimele ecuații ale celor două sisteme găsim valoarea constantei  $E$  :

$$2E = -g, \quad E = -\frac{g}{2}, \quad (11.8)$$

Să determinăm din ecuațiile (11.6) și (11.7) valorile coordonatelor punctului și ale proiecțiilor vitezei pe axe la  $t = 0$ ; găsim:

$$\begin{aligned}x_0 &= B, & v_{0x} &= A, \\y_0 &= D, & v_{0y} &= C, \\z_0 &= G, & v_{0z} &= F.\end{aligned}\tag{11.9}$$

Ele au fost determinate înlocuind pe  $t = 0$  în ecuațiile (11.5) și (11.6). Dacă comparăm acum aceste valori cu cele date în problemă, deducem valorile constantelor:

$$B = D = G = 0, \quad A = C = 0, \quad F = v_0.\tag{11.10}$$

Cu aceasta, toate constantele sînt determinate și putem înlocui rezultatele în ecuațiile (11.5); obținem:

$$\begin{aligned}x &= 0, \\y &= 0, \\z &= -\frac{gt^2}{2} + v_0 t.\end{aligned}\tag{11.11}$$

Aceste ecuații constituie rezultatul problemei. Din ele rezultă că punctul mobil are în tot timpul mișcării coordonatele  $x$  și  $y$  nule; cum singurele puncte care au aceste coordonate nule sînt punctele axei  $Oz$ , rezultă că punctul mobil se va deplasa pe această axă. Aceasta este traiectoria punctului. Mișcarea sa pe această axă, după cum o arată cea de-a treia ecuație, este o mișcare uniform variată.

*Aruncarea înclinată.* Să studiem mișcarea pe care o are un punct în aceleași condiții ca în problema precedentă, cu deosebirea că în loc ca viteza inițială  $v_0$  să fie dirijată pe verticală ea este înclinată față de orizontală cu unghiul  $\alpha$  (fig. 11.2). Datele, necunoscutele și chiar ecuațiile mișcării rămîn aceleași, cu excepția condițiilor inițiale privind viteza punctului; componentele vitezei inițiale vor fi în acest caz:

$$v_{0x} = 0, \quad v_{0y} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0z} = v_0 \sin \alpha.$$

Toate rezultatele de mai sus rămîn valabile, cu excepția constantelor  $C$  și  $F$  care acum au valorile:

$$\begin{aligned}C &= v_{0y} = v_0 \cos \alpha, \\F &= v_{0z} = v_0 \sin \alpha.\end{aligned}$$



Înlocuind în ecuațiile (11.5) obținem :

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= v_0 t \cos \alpha, \\ z &= -g \frac{t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Aceste ecuații constituie răspunsul la problemă.

De această dată numai coordonata  $x$  este nulă; aceasta înseamnă că punctul mobil trebuie să se afle în tot timpul mișcării sale în planul  $yOz$ , deoarece numai punctele din acest plan au coordonate  $x$  nulă.

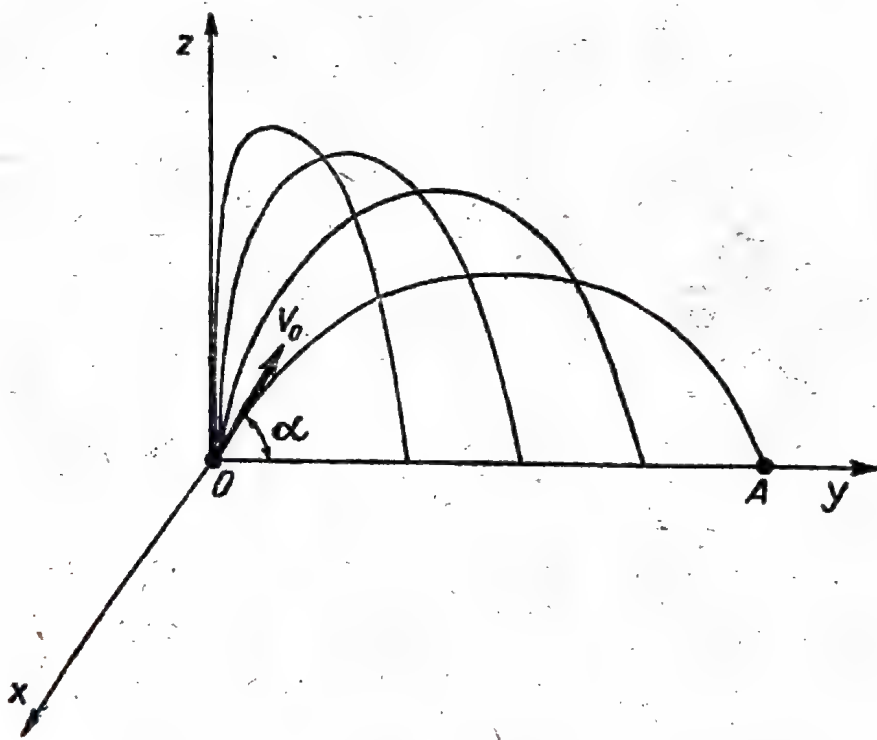


Fig. 11.2.

Dacă vom da acum lui  $t$  diferite valori și vom construi punctele  $M(x, y, t)$ , prin unirea lor vom determina traiectoria punctului mobil; ea este o curbă denumită parabolă.

Această problemă are aplicații în cazul mișcării proiectilelor trase de diferite arme; astfel, traiectoria glonțului tras de un vânător este o parabolă și mișcarea glonțului din momentul expulzării lui din pușcă pînă la atingerea țintei se face după legile exprimate de ecuațiile (11.12)

Să determinăm coordonatele punctului  $A$  (fig. 11.2). Acest punct este caracterizat prin aceea că  $z = 0$ ; din ecuațiile (11.12) deducem :

$$\frac{-gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha = 0,$$

de unde obținem două soluții :

$$t_1 = 0 \text{ și } t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (11.13)$$

Prima soluție corespunde originii  $O$ ; introducând cea de-a doua soluție în expresia coordonatei  $y$  dată de (11.12), obținem:

$$y_A = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (11.14)$$

Distanța  $y_A$  poartă numele de „bătaie”; ea reprezintă distanța de cădere a punctului pe sol, măsurată de la locul lansării. Se observă că ea este maximă pentru o viteză inițială de aceeași valoare  $v_0$  atunci când înclinarea acestei viteze este de așa natură încît  $\sin 2\alpha$  este maxim, adică pentru  $\alpha = 45^\circ$ .

În studiul mișcărilor punctului efectuat pînă aci nu s-a ținut seama de rezistența aerului. Experiența arată că forța de rezistență a aerului, care este tot timpul tangentă la traiectoria punctului și dirijată invers vitezei acestuia, joacă un rol important modificînd sensibil caracteristicile mișcării punctului.

Studiul mișcării punctului material ținînd seama și de rezistența aerului este dificil de efectuat, deoarece el conduce la rezultate care necesită calcule matematice complicate. Este important de menționat însă faptul că forța de rezistență a aerului depinde de forma corpului care se mișcă și de viteza acestuia. De aceea, o problemă importantă în tehnică, pentru corpurile care se deplasează în medii rezistente, o constituie determinarea formei lor optime pentru ca în timpul deplasării rezistența mediului exercitată asupra lor să fie minimă. Astfel prin studii și experiențe s-a ajuns la forme și profile optime, denumite forme și profile aerodinamice.

d) **Mișcarea unui punct material sub acțiunea unei forțe centrale.** Să ne imaginăm un punct material supus acțiunii unei forțe  $F$  care pentru orice poziție a punctului trece printr-un punct fix; o asemenea forță poartă denumirea de *forță centrală*. Asemenea forțe se întîlnesc foarte des în natură; astfel, forța cu care Pămîntul sau o altă planetă este atrasă de Soare este

o forță care trece printr-un punct fix (Soarele); forța cu care Pământul atrage orice corp de pe suprafața sa este o forță centrală (trece printr-un punct fix, centrul Pământului). Forțele cu care Pământul atrage diferite puncte ale unui solid sînt considerate paralele din cauza întinderii mici a corpului în raport cu Pământul; în realitate, ele sînt forțe concurente în centrul Pământului. Expresia forței de atracție dintre două corpuri a fost găsită de Isaac Newton; ea a fost formulată sub denumirea de legea atracției universale, care se enunță astfel: *două puncte materiale se atrag între ele proporțional cu produsul maselor și invers proporțional cu pătratul distanței.*

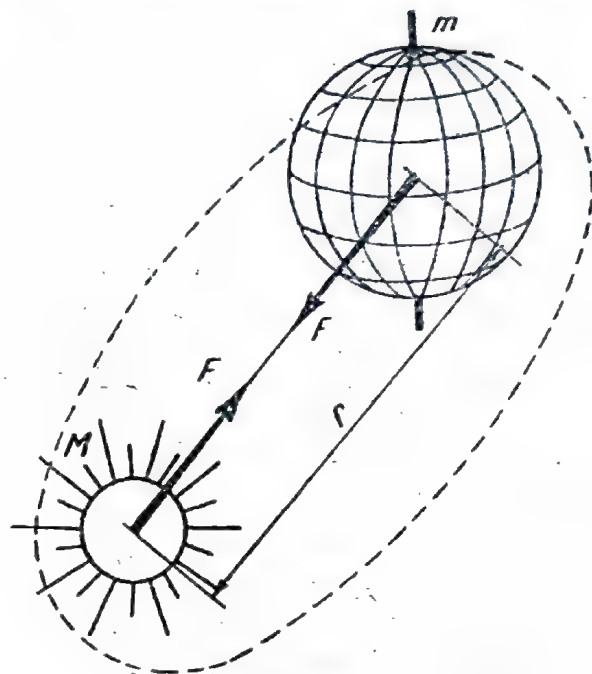


Fig. 11.3.

Dacă notăm cu  $m$  masa Pământului, cu  $M$  masa Soarelui și cu  $r$  distanța de la Pământ la Soare într-o poziție oarecare, forța  $F$  cu care Soarele atrage Pământul are expresia (fig. 11.3):

$$F = k \frac{mM}{r^2}, \quad (11.15)$$

$k$  fiind un coeficient de proporționalitate. În acest caz, atât Soarele cît și Pământul au fost considerate ca fiind reduse la centrele lor de greutate.

Studiul mișcării unui punct material sub acțiunea unei forțe centrale depășește cadrul acestui curs; de aceea ne vom mărgini la a da numai anumite rezultate. Traiectoriile punctului în această mișcare sînt curbe denumite *conice* (curbe ce se obțin prin secționarea unui con), și anume: cercul, elipsa, hiperbola, parabola sau chiar o dreaptă. Sub acțiunea unei aceleași forțe centrale, un același punct poate descrie oricare dintre aceste curbe, după valoarea vitezei inițiale. Astfel, Pământul descrie în jurul Soarelui o elipsă avînd Soarele într-unul din focare. Prima planetă artificială a sistemului nostru solar, lansată din U.R.S.S. la 2 ianuarie 1959, descrie tot o elipsă avînd Soarele într-unul din focare, ceva mai turtită decît cea a Pă-



mîntului. Sateliții artificiali lansați din U.R.S.S. au descris, după cum știm, traiectorii eliptice în jurul Pămîntului, ca de altfel și navele ce au purtat în Cosmós pe primii cosmonauți, cetățenii sovietici J. A. Gagarin (12 aprilie 1961) și G. S. Titov (6 august 1961).

Rezultatele obținute din studiul mișcării punctului material sub acțiunea forțelor centrale constituie astăzi punctul de plecare al unei științe care a luat naștere în epoca noastră, cosmonautica, știință la care savanții sovietici au adus contribuții de o uriașă însemnătate.

e) **Mișcarea oscilatorie a punctului material.** Să studiem mișcarea unui punct material sub acțiunea unei forțe constante ca direcție, iar a cărei mărime variază proporțional cu punct fix de pe suportul forței (fig. 11.4). O asemenea forță poartă denumirea de *forță elastică*; ea se întâlnește în tehnică la resorturi. Traectoria fiind cunoscută, va trebui să aflăm

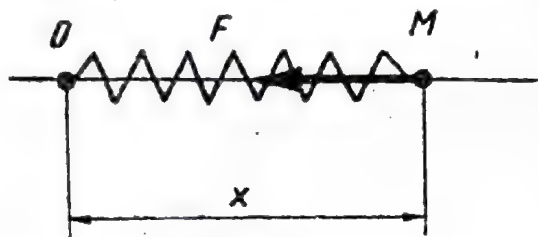


Fig. 11.4.

numai coordonata  $x = x(t)$ . Pentru aceasta, aplicăm prima dintre ecuațiile (11.1):

$$\begin{aligned} \text{Dar:} \quad m a_x &= \Sigma F_x. \\ \Sigma F_x &= -k_x \end{aligned}$$

deoarece singura forță care acționează punctul este forța elastică,  $k$  fiind un coeficient de proporționalitate. Înlocuind, avem:

$$\begin{aligned} m a_x &= -kx \\ \text{sau:} \quad a_x &= -\frac{k}{m} x = -k_1 x. \end{aligned} \quad (11.16)$$

$k_1$  fiind o constantă. Să comparăm acest rezultat cu cel dat de formula (5.15):

$$a = -\omega^2 q.$$

Deducem că mișcarea punctului mobil este o oscilație armonică cu pulsația:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (11.17)$$

Ecuatia completă a mișcării este dată de formula (5.13) :

$$x = A \sin (\omega t + \varphi). \quad (11.18)$$

constantele  $A$  și  $\varphi$  determinându-se din condițiile inițiale.

Mișcările oscilatorii ocupă un loc important în tehnică ; astfel cuțitul unui strung, ciocanele de forjă, războaiele de țesut mecanice, mașinile de cusut din industria pielăriei au mișcări oscilatorii ; de asemenea, o serie de fenomene elastice, optice, acustice sînt de natură oscilatorie.

Totodată oscilațiile au aplicații într-o serie de domenii ale tehnicii noi. Astfel, *hidrolocația*, acea știință care se ocupă cu determinarea poziției corpurilor care se găsesc sub apă, are la bază aplicarea practică a oscilațiilor ultrasonice. Măsurînd timpul în care o oscilație ultrasonică parcurge distanța de la sursa care o emite pînă la obiectul aflat sub apă și cunoscînd viteza ultrasunetelor se determină distanța pînă la obiect.

O altă aplicație a oscilațiilor în tehnica nouă a oscilațiilor ultrasonice o constituie *defectoscopia ultrasonică*, procedeu descoperit de savantul sovietic S. I. Sokolov, cu ajutorul căruia se descoperă diferite goluri sau incluziuni într-o piesă.

Mișcarea punctului material studiată mai sus este o oscilație armonică avînd amplitudinea constantă, deci care poate dura un timp nelimitat ; o asemenea oscilație poartă numele de *oscilație liberă neamortizată*.

După cîte cunoaștem însă, fenomenele oscilatorii reale din natură au, din cauza frecării, amplitudini din ce în ce mai mici pînă cînd se opresc ; astfel, o greutate atîrnată de un resort, un pendul lăsat liber să oscileze execută mișcări oscilatorii care după un timp oarecare se opresc. Asemenea mișcări oscilatorii poartă numele de *oscilații libere amortizate*.

Orice organ de mașină sau element de construcție scos din poziția de echilibru cu ajutorul unei forțe exterioare sau a unui impuls începe să oscileze, executînd o serie de oscilații libere amortizate. Aceste oscilații, care depind în forma, dimensiunile, elasticitatea și legăturile piesei considerate, se numesc *oscilații proprii* sau *libere*. Asemenea oscilații proprii întîlnim de exemplu la o grindă, la un pendul, la un resort de care este atîrnată o greutate. Perioada  $T_p$  a acestor oscilații și frecvența  $f_p$  sînt denumite respectiv *perioada proprie* și *frecvența proprie*.

Dar corpurile mai pot avea și altfel de oscilații, și anume oscilații produse de o forță exterioară care acționează în mod



periodic asupra lor ; astfel, batiul unui ciocan de forță vibrează sub acțiunea loviturilor periodice ale ciocanului, un vapor vibrează datorită forțelor care-i sînt transmise de către piesele motorului său aflate în mișcare etc. Forțele exterioare sau impulsurile exterioare care fac ca un anumit corp să vibreze se numesc *forțe perturbatoare* sau *impulsuri perturbatoare* și oscilațiile produse de aceste forțe și impulsuri se numesc *oscilații forțate*.

În momentul începerii oscilațiilor forțate apar și oscilațiile proprii ale corpului, dar acestea se amortizează foarte repede din cauza frecărilor și pînă la urmă corpul respectiv rămîne să vibreze numai sub acțiunea forțelor perturbatoare cu perioada  $T_f$  respectiv cu frecvența  $f_f$ .

În cazul corpurilor supuse la vibrații forțate, datorită forțelor exterioare perturbatoare apare un fenomen de o deosebită importanță tehnică, fenomenul de rezonanță. Atît timp cît perioada oscilațiilor forțate este diferită de perioada oscilațiilor proprii ale corpului respectiv (mai mare sau mai mică), corpul oscilează cu amplitudini care depind de diferența acestor două perioade. În cazul în care perioada oscilațiilor forțate devine egală cu perioada oscilațiilor proprii apare *fenomenul de rezonanță*. În acest caz amplitudinea oscilațiilor crește foarte mult și piesa respectivă se rupe.

Cazuri frecvente de ruperi prin rezonanță au avut loc la arborii aflați în mișcare de rotație, la fundațiile mașinilor motoare, la poduri.

Menționăm că fenomenul de rezonanță are însă și aplicații tehnice folositoare ; astfel întreaga radiofonie se bazează pe rezonanța care constă în coincidența perioadei de oscilație a circuitului oscilant de la aparatul de recepție cu cea a oscilației postului de emisie.

Pe lîngă aplicațiile practice în diferite domenii ale tehnicii, oscilațiile au uneori și efecte vătămătoare asupra omului, mașinilor sau clădirilor.

Astfel ele pot provoca crăpături ale zidurilor sau tencuielilor, tasări ale fundațiilor, zgomote, bătăi în lagăre, dereglări ale mașinilor sau aparatelor de măsură, scurtcircuite la mașinile electrice, deteriorări ale garniturilor conductelor etc.

Avînd în vedere aceste efecte, sarcina descoperirii și izolării principalelor surse de oscilații apare ca o sarcină principală a tehnicienilor din întreprinderile care folosesc aparate și mașini în care iau naștere procese oscilatorii.



Pentru muncitorii și tehnicienii care lucrează în apropierea surselor de oscilații se prevăd o serie de măsuri, ca : micșorarea intensității vibrațiilor prin interpunerea unor păături elastice între mașini și fundații, înlăturarea în cât mai largă măsură a surselor de vibrații, folosirea de mijloace de protecție speciale (costume, măști de amortizare, ecrane de protecție, izolații etc.).

Măsurile privind protecția sănătății muncitorilor împotriva efectelor dăunătoare ale oscilațiilor formează astăzi, la noi în țară, o preocupare importantă a statului democrat-popular. În vederea acestui scop, în anii regimului democrat-popular s-a înființat Institutul de cercetări științifice pentru protecția muncii, unde se elaborează măsurile de protecție împotriva vibrațiilor în cadrul unui plan general de protecție a muncii.

f) **Mișcarea pendulului simplu.** Un punct material atârnat de un punct fix prin intermediul unui fir perfect flexibil și inextensibil formează un pendul simplu. Dacă-l depărtăm din poziția sa verticală, în care el se află în repaus, pendulul oscilează de o parte și de alta a acestei poziții (fig. 11.5).

Pendulul simplu constituie deci un punct material supus la legături, avînd un singur grad de libertate (unghiul  $\varphi$  al firului cu verticala).

Datele și necunoscutele acestei probleme de dinamică sînt cele din tabela 11.2.

*Tabela 11.2*

Date și necunoscute la mișcarea pendulului simplu

Date	Forțe	$mg$
	Mărimi geometrice și mecanice	$m, l$
	Condiții inițiale	$t = 0 \begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases}$
Necunoscute	Mișcarea	$x = x(t)$ $y = y(t)$ sau $\theta = \theta(t)$ $(x^2 + y^2 = l^2)$
	Reacțiunile	$N = N(t)$

Pentru rezolvarea problemei, aplicăm ecuațiile (11.1) :

$$\begin{aligned} ma_x &= \Sigma F_x, \\ ma_y &= \Sigma F_y. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Alegînd axele  $Ox$ ,  $Oy$  ca în figura 11.5, ecuațiile de mișcare ale punctului  $M$  se scriu :

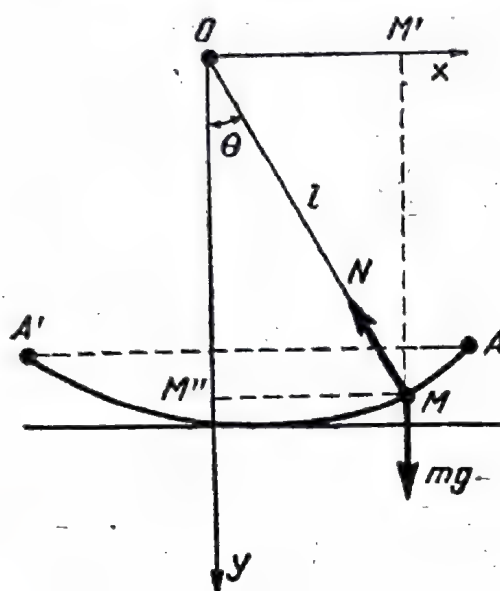


Fig. 11.5.

$$ma_x = -N \sin \theta, \quad (11.20)$$

$$ma_y = -N \cos \theta + mg.$$

Dar din triunghiul dreptunghic  $OMM'$  deducem :

$$\sin \theta = \frac{x}{l}, \quad \cos \theta = \frac{y}{l}. \quad (11.21)$$

Înlocuind în (11.20) obținem :

$$ma_x = -N \frac{x}{l} \quad (11.22)$$

$$ma_y = -N \frac{y}{l} + mg.$$

Să presupunem că studiem numai micile oscilații ale pendulului ; în acest caz, unghiul  $\theta$  este foarte mic și putem considera că punctul  $M$  are coordonata  $y$  aproximativ constantă. Aceasta revine la a înlocui traiectoria circulară  $AMA'$  a punctului cu o traiectorie rectilinie, coarda  $AA'$ .

Înlocuind în ecuațiile (11.22)  $y \approx l$  obținem  $a_y = 0$  și din cea de-a doua ecuație rezultă :

$$N = mg, \quad (11.23)$$

care înlocuită în prima ecuație (11.22) ne dă :

$$ma_x = -mg \frac{x}{l}; \quad a_x = -\frac{g}{l} x = -kx, \quad (11.24)$$

$k$  fiind o constantă. Comparînd între ele ecuațiile (11.24) și (5.15) deducem că mișcarea punctului  $M$  este o oscilație armonică pe dreapta  $AA'$ , a cărei ecuație este :

$$x = A \sin (\omega t + \varphi). \quad (11.25)$$

Constantele  $A$  și  $\varphi$  se determină din condițiile inițiale.

Pulsația mișcării este :

$$\omega^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (11.26)$$

iar perioada mișcării este :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (11.27)$$

Aceasta reprezintă perioada micilor oscilații ale pendulului, cunoscută de la fizică.

Formulele (11.23) și (11.25) conțin rezolvarea problemei, deoarece determină mișcarea și reacțiunile.

g) **Mișcarea unui punct material pe un plan înclinat.** Să considerăm un punct material care se deplasează cu frecare pe un plan înclinat cu unghiul  $\alpha$  față de orizontală (fig. 11.6). Coeficientul de frecare dintre punct și plan este  $\mu$ . Se cere să se studieze mișcarea și să se determine reacțiunea planului. Datele și necunoscutele acestei probleme sînt arătate în tabela 11.3.

Pentru rezolvarea problemei aplicăm ecuațiile (11.1) :

$$ma_x = \Sigma F_x,$$

$$ma_y = \Sigma F_y,$$

care în cazul problemei noastre devin :

$$ma_x = mg \sin \alpha - \mu N, \quad (11.28)$$

$$ma_y = N - mg \cos \alpha.$$

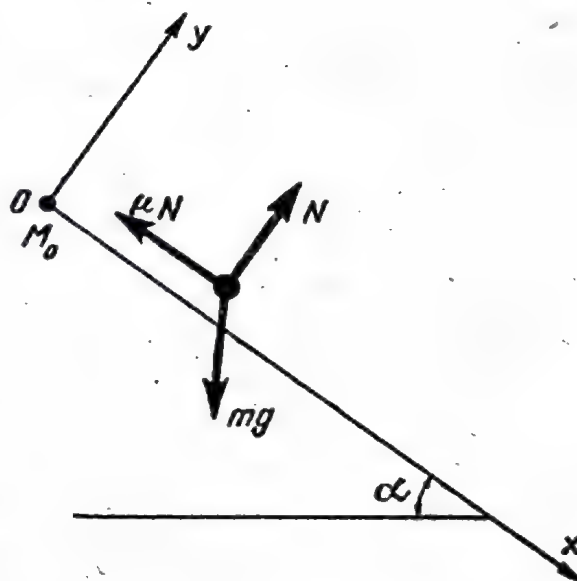


Fig. 11.6.

Deoarece punctul este supus la o legătură, coordonatele sale nu pot lua orice valori ; într-adevăr, din figura 11.6 se vede că punctul trebuie să rămână în timpul mișcării în contact cu planul, adică pe axa  $Ox$  a sistemelor de axe ; aceasta revine la a spune că punctul nu poate avea nici viteză și nici accelerație pe axa  $Oy$  :

$$v_y = a_y = 0.$$



Tabela 11.3

Date și necunoscute la mișcarea punctului material greu pe un plan înclinat

Date	Forțe	$mg$
	Mărimi geometrice și mecanice	$m, \mu$
	Condiții inițiale	$t = 0 \begin{cases} x = 0 & v_x = 0 \\ y = 0 & v_y = 0 \end{cases}$
Necunoscute	Mișcarea	$\begin{aligned} z &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}$
	Reacțiunile	$N = N(t)$

Înlocuind în (11.28) obținem :

$$ma_x = mg \sin \alpha - \mu N, \quad (11.29)$$

$$0 = N - mg \cos \alpha.$$

Din cea de-a doua ecuație obținem valoarea reacțiunii :

$$N = mg \cos \alpha,$$

care înlocuită în prima ne dă :

$$a_x = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = \text{const.}$$

Comparînd acest rezultat cu a doua formulă (5.4) deducem că mișcarea punctului pe planul înclinat este o mișcare uniform variată funcția  $x = x(t)$  va avea forma :

$$x = At^2 + Bt + C, \quad (11.30)$$

în care :

$$A = \frac{g}{2} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

constantele  $B$  și  $C$  determinîndu-se din condițiile inițiale.

Astfel viteza punctului este :

$$v_x = 2At + B.$$

Înlocuind aci  $t = 0$  și  $v_x = 0$ , obținem  $B = 0$ ; dacă înlocuim și în (11.30)  $t = 0$  și  $x = 0$ , obținem  $C = 0$ . Ecuația mișcării devine deci :

$$x = \frac{g}{2} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) t^2. \quad (11.31)$$

## 2. Dinamica solidului rigid

Corpul solid rigid reprezintă, după cum am mai arătat, un sistem material mai complex decât punctul material, cu ajutorul căruia aproximăm corpurile reale din natură.

Ca și în cazul punctului material, remarcăm faptul că studiul mișcării solidului rigid prezintă multe dificultăți de natură matematică, a căror rezolvare nu este încă nici astăzi satisfăcătoare.

În cele ce urmează ne vom preocupa numai de acele mișcări ale solidului pentru care gradele de libertate variază conform cu cele trei tipuri de mișcări studiate în cinematică : mișcare uniformă, uniform variată și oscilatorie armonică.

Ca metode de rezolvare a problemelor de dinamica solidului rigid pot fi folosite oricare dintre metodele studiate la capitolul X. În cele ce urmează, vom aplica numai principiul lui *d'* Alembert.

a) **Solidul rigid liber.** Ne propunem să studiem mișcarea unui solid rigid liber, adică nesupus nici unei legături. Un asemenea solid nu este supus acțiunii nici unei forțe de legătură (reacțiune a legăturii), putîndu-se deplasa nestîngherit în orice direcție în spațiu ; solidul rigid liber are șase grade de libertate.

Singurele necunoscute din cazul mișcării solidului rigid liber sînt gradele sale de libertate ca funcții de timp. În anumite probleme se poate cere însă determinarea uneia sau mai multor forțe care acționează solidul, în scopul realizării unei anumite mișcări date.

Problemele de mișcarea solidului rigid liber au în general următoarea structură.

Date :

- forțe : toate forțele care acționează solidul rigid într-o poziție oarecare a sa la un moment oarecare  $t$  ;
- mărimi geometrice și mecanice : masa, momentele de inerție ale corpului, dimensiunile sale ;
- condiții inițiale : valorile parametrilor geometrici care-i caracterizează poziția și ale derivatelor acestor parametri la un moment  $t = t_0$  cînd începe mișcarea.

Necunoscute :

- mișcarea solidului rigid, caracterizată prin parametrii geometrici care-i determină poziția, ca funcții de timp. O dată cunoscute valorile acestor parametri, se poate face un studiu

cinematic al mișcării solidului, determinînd căreia dintre mișcările studiate în cinematică îi aparține mișcarea pe care o efectuează solidul considerat.

b) **Solidul rigid supus la legături.** Pentru a studia mișcarea solidului rigid supus la legături, vom îndepărta mai întîi legăturile introducînd în locul lor, așa cum am procedat și la statică, forțele de legătură. În urma acestei operații, solidul rigid devine liber și i se pot aplica metodele de studiu indicate la capitolul X.

Legăturile din cazul mișcării solidului sînt aceleași ca la statică : simpla rezemare, prinderea cu fire și bare, articulația și încastrarea.

Datele și necunoscutele sînt în general aceleași ca și în cazul solidului rigid liber, cu deosebirea că în acest caz apar ca necunoscute și vectorii reacțiuni ai legăturilor.

c) **Solid rigid aflat în mișcare de translație.** **Exemplu :** Un corp de formă prismatică avînd greutatea  $P$  se mișcă în

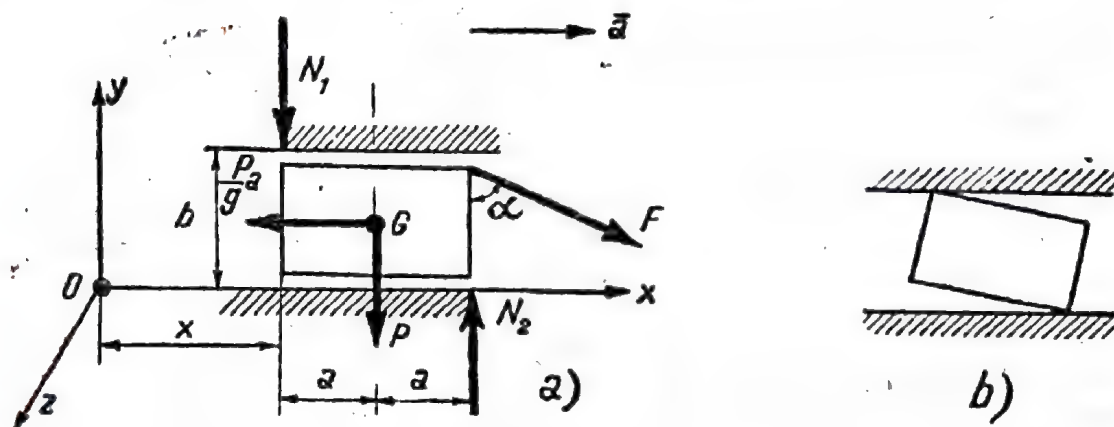


Fig. 11.7.

interiorul unui ghidaj rectiliniu (fig. 11.7, a) acționat de o forță  $F$ . Considerînd reazemele solidului fără frecare, se cere să se studieze mișcarea și să se determine reacțiunile. Se dau : unghiul  $\alpha$  de înclinare al forței  $F$  și distanțele  $a, b$  ; se vor neglija frecările.

Vom presupune că în timpul mișcării solidul se reazemă în două colțuri opuse, așa cum se arată în figura 11.7, b. Alegem un sistem de axe  $Oxyz$  ; mișcarea corpului este determinată numai prin coordonata  $x$  (corpul are un singur grad de libertate). Vom presupune că în momentul inițial corpul pleacă fără viteză și se află astfel încît muchia verticală din stînga coincide cu axa  $Oy$ . Datele și necunoscutele acestei probleme sînt trecute în tabela 11.4.



Tabela 11.4

Date și necunoscute într-o problemă de mișcarea de translație a solidului rigid

Date	Forțe	$P, F, \alpha^*$
	Date geometrice și mecanice	$a, b$
	Condiții inițiale	la $t = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases}$
Necunoscute	Mișcarea	$x = x(t)$
	Reacțiuni	$N_1, N_2$

Corpul avînd o mișcare de translație, îi vom aplica o singură forță de inerție opusă accelerației  $a$ , care este presupusă ca fiind dirijată paralel cu axa ghidajului către dreapta.

Forțele care acționează corpul formează un sistem de forțe coplanare; ecuațiile de echilibru dinamic sînt :

$$-\frac{P}{g}a + F \sin \alpha = 0,$$

$$N_2 - N_1 - P - F \cos \alpha = 0, \quad (11.32)$$

$$N_1 a + N_2 a - F \frac{b}{2} \sin \alpha - F a \cos \alpha = 0,$$

celelalte ecuații devenind identități.

Cu ajutorul acestor ecuații determinăm mișcarea și reacțiunile. Din prima rezultă :

$$a = \frac{gF \sin \alpha}{P} = \text{const.} \quad (11.33)$$

Deoarece accelerația este constantă, mișcarea este uniform variată [v. formula (5.10)] :

$$x = \frac{gF \sin \alpha}{P} \frac{t^2}{2}. \quad (11.34)$$

\*) Unghiul  $\alpha$  a fost trecut la forțe deoarece el caracterizează vectorul  $F$ .

Constantele  $B$  și  $C$  din formula (11.34) sînt nule deoarece la  $t = 0$ ,  $x = 0$  și  $v = 0$ .

Din celelalte două ecuații obținem valorile reacțiunilor :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{P}{2} + F \cos \alpha + \frac{Fb \sin \alpha}{4a}, \\ N_2 &= \frac{Pb \sin \alpha}{4a} - \frac{P}{2}. \end{aligned} \quad (11.35)$$

Observăm că reacțiunile sînt constante.

d) **Mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.** Foarte multe dintre organele mobile ale mașinilor (arbori dreپți și cotiți, șaibe, roți dințate, volanți, scripeți etc.) execută mișcări de rotație în jurul a diferite axe fixe.

În timpul acestei mișcări, solidul respectiv este acționat de o serie de forțe și cupluri care îl pun în mișcare sau care caută să-i accelereze mișcarea și de o serie de forțe și cupluri care se opun acestei mișcări sau care caută să-i încetinească mișcarea; primele se numesc *forțe și cupluri motoare*, iar celelalte *forțe și cupluri rezistente*. Primele provin de la motorul care antrenează axa corpului respectiv sau de la tensiunile motoare ale curelelor care acționează corpul, iar celelalte de la mașina care este antrenată de axul respectiv sau de la tensiunile rezistente ale curelelor care acționează corpul precum și de la frecările din lagăre sau cu aerul. În afară de aceste forțe mai există și altele, cum ar fi de exemplu greutatea corpului respectiv împreună cu a altor corpuri solidare cu el.

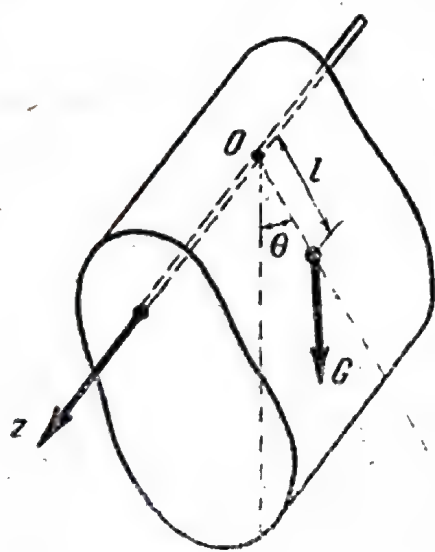


Fig. 11.8.

**Exemplu. Pendulul fizic.** Să considerăm un solid cu axă fixă care poate oscila în jurul unei axe fixe orizontale, aflat sub acțiunea unei singure forțe exterioare: greutatea proprie. Acest corp alcătuiește ceea ce denumim un *pendul fizic* (fig. 11.8).

Să studiem mișcarea acestui corp care este un caz particular de solid cu axa fixă, adică să determinăm modul cum variază unghiul  $\varphi$  cu timpul.

Pentru aceasta, vom aplica numai ecuația de momente în raport cu axa de rotație. Momentul forțelor de inerție în raport cu axa de rotație este :

$$M_z = J_z \varepsilon. \quad (11.36)$$

Deoarece reacțiunile din axă nu dau moment, singura forță exterioară care dă moment în raport cu axa  $z$  este greutatea  $G$ ; valoarea acestui moment este :

$$M_z = Gl \sin \theta \quad (11.37)$$

Am ales sensul pozitiv în sensul creșterii unghiului  $\theta$ . Ecuația de echilibru dinamic este :

$$M_z + M_{Iz} = 0 \quad (11.38)$$

sau :

$$Gl \sin \theta + J_z \varepsilon = 0. \quad (11.39)$$

Presupunând că unghiul  $\theta$  este mic, putem pune  $\sin \theta \approx \theta$  și ecuația (11.39) devine :

$$J_z \varepsilon = - Gl \theta$$

sau :

$$\varepsilon = - \frac{Gl}{J_z} \theta = - C \theta, \quad (11.40)$$

$C$  fiind o constantă. Comparînd ecuația (11.40) cu ecuația (5.15), deducem că mișcarea pendulului este o oscilație armonică de perioadă :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Gl}} \quad (11.41)$$

Aceasta este perioada de oscilație a pendulului fizic.

Pendulul simplu care are aceeași perioadă ca pendulul fizic se numește pendul simplu sincron. Lungimea sa rezultă din egalarea relațiilor (11.41) și (11.27) :

$$2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Gl}},$$

de unde :

$$l' = \frac{J_z}{Ml}, \quad (11.42)$$

$M$  fiind masa pendulului fizic.



## Capitolul XII

### CIOCNIRI

#### 1. Fenomenul ciocnirii și aplicațiile sale în tehnică

În toate capitolele studiate pînă aci am presupus că vectorul viteză al unui punct aparținînd unui solid rigid se schimbă în mod continuu, fără salturi bruște.

În natură constatăm că există însă fenomene la care vitezele punctelor unui solid se schimbă brusc, aproape instantaneu; asemenea fenomene poartă denumirea de *ciocniri*.

Fenomenul ciocnirii are multe aplicații în tehnică: astfel operațiile de prelucrare a metalelor: forjarea, ștanțarea, alte operații ca nituirea, baterea cuielor, cuplarea bruscă a doi arbori, angrenarea bruscă a două roți dințate ș.a. sînt aplicații ale fenomenului de ciocnire.

#### 2. Punerea problemei în cazul ciocnirii a două corpuri materiale

Aspectul general al problemelor de ciocnire a două corpuri materiale este următorul:

Date:

— caracteristicile geometrice (forma și dimensiunile) și mecanice ale corpurilor care se ciocnesc;

— distribuția de viteză înainte de ciocnire pentru fiecare dintre cele două corpuri:

— modul în care se efectuează ciocnirea.

Necunoscute:

— distribuția de viteze după ciocnire pentru fiecare dintre cele două corpuri.

#### 3. Ciocnirea centrică a două bile

Să considerăm două bile sferice avînd masele  $m_1$  și  $m_2$  și vitezele  $v_1$  și  $v_2$  ale centrelor îndreptate în lungul liniei  $O_1O_2$ ; ele se ciocnesc după linia centrelor, căpătînd după ciocnire vitezele  $v'_1$  și  $v'_2$ . O asemenea ciocnire este denumită ciocnire centrică. Se cere să se determine vitezele  $v'_1$  și  $v'_2$  (fig. 12.1).

Pentru aceasta, să considerăm sistemul format de cele două bile; cum forța care ia naștere în momentul ciocnirii este interioară sistemului format de ele (ea se exercită numai între cele două bile fără intervenția altui corp din afară), după cum am

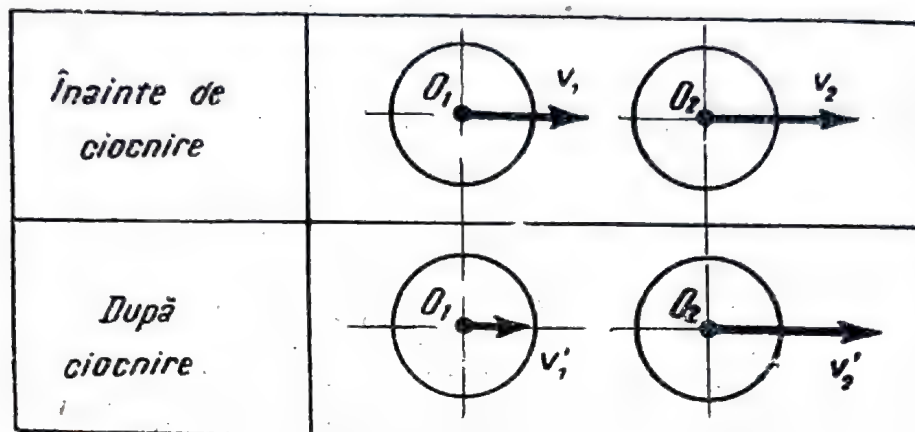


Fig. 12.1.

văzut impulsul sistemului se conservă, adică suma impulsurilor celor două bile înainte de ciocnire este egală cu suma impulsurilor celor două bile după ciocnire:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (12.1)$$

Am obținut numai o singură ecuație pentru determinarea vitezelor  $v_1'$  și  $v_2'$ ; s-ar părea prin aceasta că fenomenul este nedeterminat, fapt care nu concordă cu realitatea. Eroarea provine din aceea că am considerat cele două corpuri ca nedeformabile. Dacă vom renunța în acest caz la ipoteza solidului rigid și vom considera cele două corpuri ca deformabile, vom observa că fenomenul de ciocnire se petrece în două faze: o *fază de comprimare*, când centrele celor două sfere se apropie pînă în momentul egalizării vitezelor lor, și o *fază de relaxare*, când viteza primei sfere scade, iar a celei de-a doua crește. O mărime importantă la începutul și la sfîrșitul ciocnirii o constituie viteza relativă a celor două sfere. Într-adevăr, după cum se știe din practică, ceea ce este important în ciocnirea a două corpuri aflate în mișcare este viteza lor relativă și nu vitezele absolute ale fiecărui corp în parte. Să presupunem că vitezele înainte de ciocnire și după ciocnire stau în relațiile:

$$v_1 > v_2, \quad v_2' > v_1'$$

În acest caz, vitezele relative ale celor două bile înainte de începerea fenomenului de ciocnire și imediat după terminarea lui sînt :

$$\begin{aligned} v_r &= v_1 - v_2, \\ v'_r &= v'_2 - v'_1, \end{aligned} \quad (12.2)$$

Raportul acestor două viteze relative îl vom denumi *coeficient de restituire* sau *coeficient de elasticitate la ciocnire* :

$$k = \frac{v'_r}{v_r} = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2}. \quad (12.3)$$

Coeficientul  $k$  depinde de natura materialelor celor două corpuri.

Pentru  $k = 1$ , vitezele relative înainte și după ciocnire sînt egale ; acesta este cazul denumit ciocnire elastică.

Pentru  $k = 0$ ,  $v'_r = 0$ , nu mai există mișcare relativă între cele două sfere după ciocnire ; ele pleacă împreună. Acesta este cazul denumit *ciocnire plastică*. În cazul unei ciocniri reale,  $0 < k < 1$ , adică  $v'_r < v_r$ . Acesta este cazul ciocnirii corpurilor din natură. Printre acestea există corpuri confecționate din materiale al căror coeficient de restituire la ciocnire se apropie mai mult de ciocnirea elastică (de exemplu fildeșul, oțelul) sau de ciocnirea plastică (argila, ceara, plastilina etc.).

Cunoscînd valoarea coeficientului  $k$ , relația (12.3) devine o a doua ecuație pentru determinarea vitezelor  $v'_1$  și  $v'_2$ . Rezolvînd sistemul acestor ecuații, obținem :

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 - \frac{(v_1 - v_2)(1 + k)}{1 + \frac{m_1}{m_2}}, \\ v'_2 &= v_2 + \frac{(v_1 - v_2)(1 + k)}{1 + \frac{m_2}{m_1}}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Cu aceasta, problema ciocnirii a două bile este rezolvată.

Din formulele (12.4) se vede că, deoarece  $v_1 > v_2$ , prin ciocnire viteza bilei cu viteză mare (bila 1) se micșorează, întrucît  $v'_1 < v_1$ , iar viteza bilei cu viteză mică (bila 2) crește întrucît  $v'_2 > v_2$ .



#### 4. Pierderea de energie în cazul ciocnirii

Sistemul celor două bile are o energie  $E_1$  înainte de ciocnire și o energie  $E_2$  după ciocnire; expresiile lui  $E_1$  și  $E_2$  sînt, după formulele cunoscute :

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \\ E_2 &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Să notăm prin  $\Delta E$  diferența energiilor la începutul și la sfîrșitul ciocnirii ( $E_1 > E_2$ , deoarece după ciocnire s-a pierdut o parte din energia totală) :

$$\Delta E = E_1 - E_2.$$

Aceasta o vom denumi *pierdere de energie la ciocnire*. Dacă înlocuim în expresia  $E_2$  valorile lui  $v_1'$  și  $v_2'$  date de relațiile (12.4) și efectuăm calculele, obținem :

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{a(m_1 + m_2)} (1 - k^2) (v_1 - v_2)^2. \quad (12.6)$$

Se constată că în cazul ciocnirii elastice ( $k = 1$ ) obținem  $\Delta E = 0$ , adică nu avem pierdere de energie; pierderea maximă de energie o avem în cazul ciocnirii plastice ( $k = 0$ ), și anume :

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 \quad (12.7)$$

Această energie pierdută o regăsim în alte forme de energii: energia de deformare a corpurilor, energia calorică, luminoasă etc.

#### 5. Ciocnirea centrică a unei bile cu un perete fix

Să presupunem că cel de-al doilea corp (corpul lovit) este în loc de o bilă un perete fix (fig. 12.2). În acest caz, vom putea găsi viteza bilei după ciocnire înlocuind în formulele (12.4)

$v'_2 = v_2 = 0$  (peretele este fix și înainte și după ciocnire) și  $m_2 = \infty$  (peretele fix este solidar cu Pământul, care are o masă mai mare decât a bilei care lovește).

Vom obține din prima formulă :

$$v'_1 = -kv_1, \quad (12.8)$$

adică bila se întoarce cu o viteză de  $k$  ori mai mică decât cea pe care a avut-o . Acesta este spre exemplu cazul unei mingi care se lovește de podea, ridicându-se din ce în ce la o înălțime mai mică.

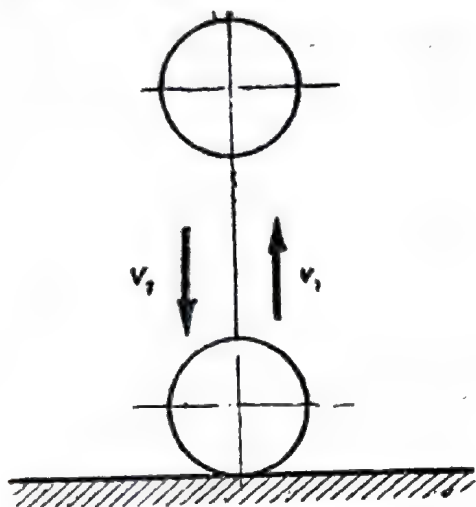


Fig. 12.2.

## 6. Ciocnirea unei sfere cu un corp care se poate roti în jurul unei axe fixe; centrul de ciocnire

Și în acest caz, problema se pune la fel ca la ciocnirea centrală a două bile : bila lovește corpul într-un plan perpendicular pe axă, după normala comună în punctul de contact ; cunoscând vitezele bilei și corpului înainte de ciocnire, se cer vitezele lor după ciocnire. Nu vom studia acest caz, ci vom remarca doar că el este un caz de ciocnire la care unul dintre corpuri este supus la legături ; datorită acestui fapt, în timpul ciocnirii va lua naștere în general o percusiune de legătură, care se pune în evidență în mod practic printr-o „smucitură,, a legăturii. Pentru unele aplicații practice este important de știut cum trebuie lovit un asemenea corp astfel încât axa de care este suspendat să nu sufere aceste smucituri. Se poate demonstra că axa nu suferă smucituri atunci când corpul este lovit perpendicular pe planul format de axa de rotație și centrul de greutate al corpului într-un punct  $P$  denumit *centru de ciocnire*. Distanța

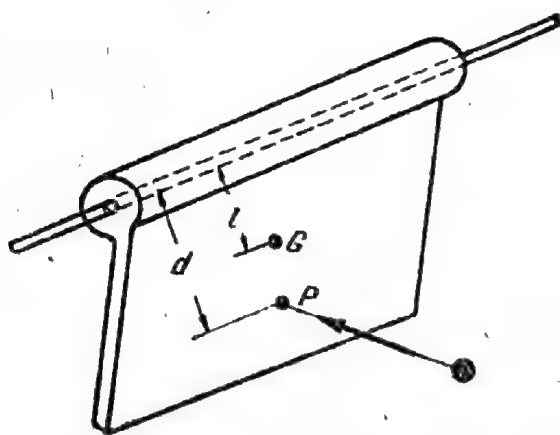


Fig. 12.3.

acestui punct la axa de rotație este egală cu lungimea pendulului simplu (fig. 12.3) sincron :

$$d = \frac{I\Delta}{Ml} \quad (12.9)$$

( $I\Delta$  momentul de inerție al corpului în raport cu axa de rotație,  $M$  masa corpului,  $l$  distanța centrului de greutate la axa de rotație).

## 7. Aplicațiile tehnice ale fenomenului de ciocnire

a) **Baterea cuielor cu ciocanul sau a unui pilot cu berbecul** poate fi asimilată ciocnirii plastice a două bile, din care cea de-a doua este în repaus în momentul ciocnirii ( $k = 0, v_2 = 0$ ) (fig. 12.4). În acest caz, dacă raportăm pierderea de energie calculată cu formula (12.6) la energia inițială a cărei expresie este :

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

obținem procentul de energie pierdută din energia inițială :

$$\eta = \frac{\Delta E}{E_1} = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \quad (12.10)$$

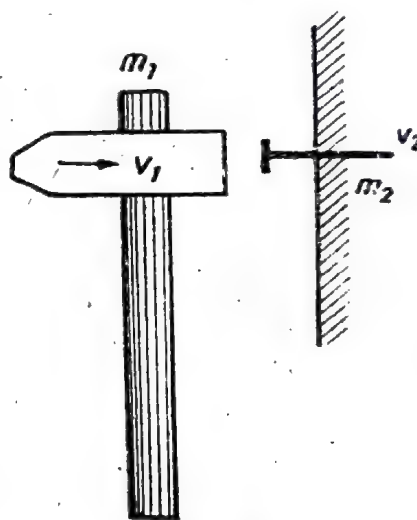


Fig. 12.4.

Cum în exemplele de mai sus avem interesul ca prin ciocnire să producem mișcare, va trebui ca acest raport să fie cât mai mic ; pentru aceasta, trebuie ca masa  $m_1$  a ciocanului sau berbecului să fie mult mai mare decât cea a cuiului respectiv a pilotului bătut.

b) **Prelucrarea prin ciocnire.** În acest caz intră operațiile de îndreptare, îndoire, nituire realizate cu variații bruște de viteză (ciocniri), la care avem interesul ca să se piardă cât mai multă energie în timpul ciocnirii pentru deformarea corpului respectiv (fig. 12.5).

Asimilând și această situație cu ciocnirea plastică a două bile, obținem că raportul  $m_1/m_2$  trebuie să fie mic, adică corpul de prelucrat trebuie să aibă o masă mare. Din acest motiv,



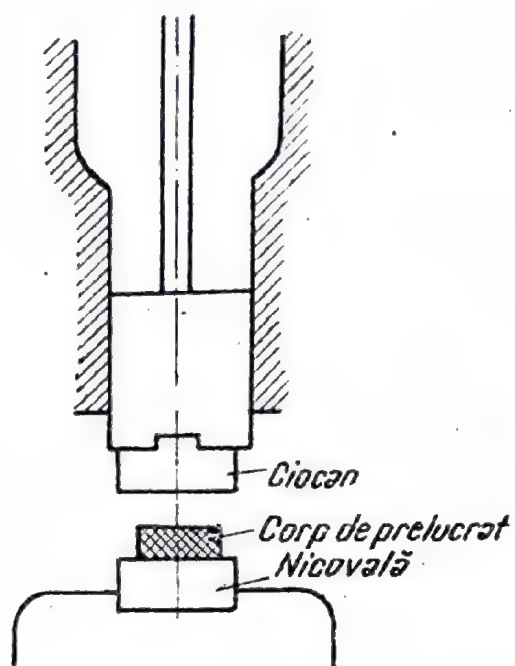


Fig. 12.5.



Fig. 12.6.

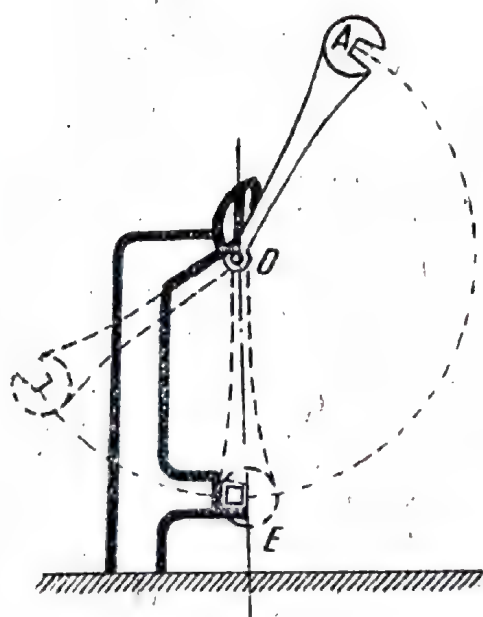


Fig. 12.7.

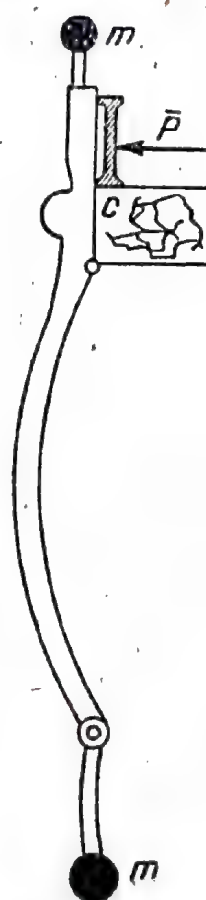


Fig. 12.8.

masa corpului de prelucrat este mărită prin așezarea sa pe o nicovală (de exemplu în cazul forjării) sau pe contrabuterolă în cazul nituirii.

Dacă ciocnirile din cazul de mai sus nu sînt plastice, raportul  $\eta$  are valoarea :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} (1 - k^2). \quad (12.11)$$

c) **Determinarea centrului de ciocnire la diferite scule și piese.** În foarte multe domenii din tehnică se cere ca axa de rotație a unei piese care suferă ciocniri să fie astfel așezată încît să nu se producă smucituri în această axă. Astfel, pentru a obține un bun randament în muncă ciocanul nu trebuie să obosească în mod inutil pe muncitor prin producerea de ciocniri în mînă. Făcînd coada de o lungime corespunzătoare și alegînd poziția în care este ținut astfel încît punctul C să fie centrul de ciocnire, se evită smuciturile mîinii (fig. 12.6).

Pentru a evita smuciturile axei pendulului pentru măsurarea rezilienței (capacitatea de a rezista la șoc) a diferitelor materiale, pendulul este astfel construit încît punctul unde lovește materialul este centrul său de ciocnire (fig. 12.7). Pentru a nu avea percuții în axa vătălei războiului de țesut, trebuie ca distanța dintre axa vătălei și gura țesăturii să fie egală cu lungimea pendulului echivalent, adică gura țesăturii trebuie să se afle în centrul de ciocnire. Acest lucru se realizează în anumite cazuri prin adăugarea unor mase suplimentare  $m$  (fig. 12.8).

### Capitolul XIII

## NOȚIUNI ELEMENTARE DE DINAMICA MAȘINILOR

### 1. Noțiunea de mașină

În general, vom înțelege prin mașină un ansamblu de mecanisme destinat executării unor mișcări determinate, în scopul realizării unui lucru mecanic util sau al transformării unei energii mecanice.

Orice mașină sau agregat de mașini se compune în mare din trei părți esențiale: *mecanismul motor* sau motorul, care furnizează energia necesară funcționării mașinii, *mecanismul de transmisie*, care transmite mișcarea la mecanismul de execuție, avînd în general posibilitatea de a varia caracteristicile cinematice și dinamice ale mișcării transmise, și *mecanismul de execuție* sau mașina de lucru, avînd scopul de a efectua lucrul util cerut de procesul tehnologic pe care trebuie să-l îndeplinească mașina sau agregatul respectiv.

Construirea societății noi, socialiste este de neconceput fără un înalt grad de mecanizare a tuturor proceselor productive din toate ramurile de activitate ale industriei, agriculturii, transporturilor. Acest înalt grad de mecanizare nu este pus în slujba stoarcerii de profituri cît mai mari și al exploatării capitaliste, ci în scopul eliberării din ce în ce a omului de munca fizică, al creării bunăstării și fericirii omului, într-o societate eliberată de orice exploatare. Prin prisma acestor considerații trebuie privite recente hotărîri de partid și de stat privind introducerea tehnicii celei mai noi, mecanizarea și automatizarea din ce în ce mai adîncită a proceselor productive.

În cele ce urmează vom analiza pe scurt cele mai importante caracteristici ale unei mașini, din punct de vedere mecanic, caracteristici de bază care trebuie cunoscute de orice tehnician chemat să conducă sau să mînuiască cu competență mașini din ce în ce mai perfecționate, care constituie astăzi la noi în țară un bun al întregului popor. Studiul lor va fi reluat și adîncit în cadrul disciplinelor de specialitate.

## 2. Forțele care acționează asupra unei mașini

În timpul funcționării unei mașini, asupra organelor sale acționează următoarele forțe:

- forțe motoare,
- forțe rezistente utile,
- forțe rezistente pasive (frecări),
- greutatea ale organelor de mașini,
- reacțiunile din legăturile existente între elemente.

Aceste forțe pot fi constante sau variabile în raport cu poziția sau viteza organului asupra căruia ele acționează.



### 3. Echilibrarea forțelor de inerție

O categorie importantă de forțe o constituie forțele de inerție, care pot atinge valori importante datorită accelerațiilor mari la care sînt supuse unele organe ale mașinii. Aceste forțe

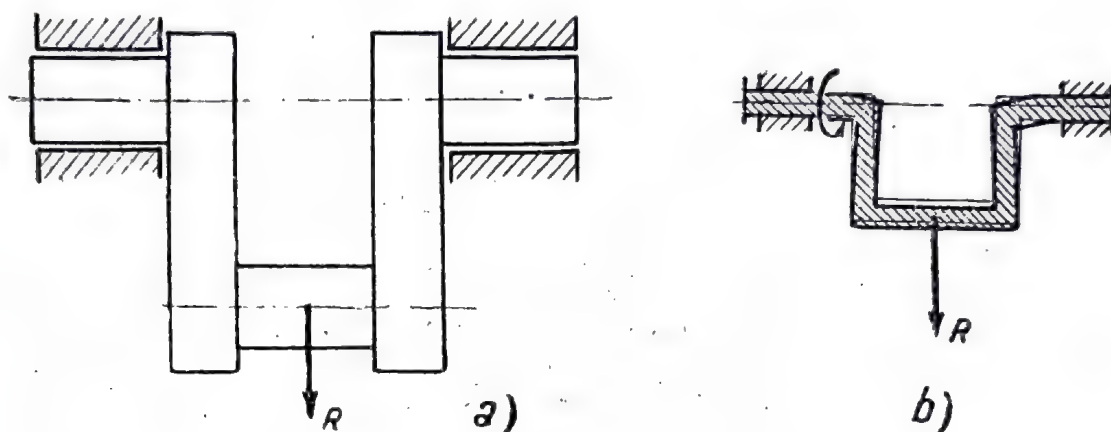


Fig. 13.1.

de inerție produc solicitări foarte mari în legăturile mașinii și vibrații, de aceea se caută pe cît este posibil ca efectul lor să fie compensat prin montarea unor mase adiționale; operația de îndepărtare a efectelor dăunătoare ale forțelor și momentelor forțelor de inerție care acționează un organ de mașină se numește *echilibrarea forțelor de inerție*.

Astfel, în cazul mișcării arborelui cotit din figura 13.1, *a* forțele de inerție centrifuge dau o rezultantă  $R$ , avînd drept efect reacțiuni suplimentare mari în lagăre, producerea de vibrații precum și deformarea arborelui (fig. 13.1, *b*). În cazul arborelui din figura 13.2, ele se reduc la un cuplu avînd în

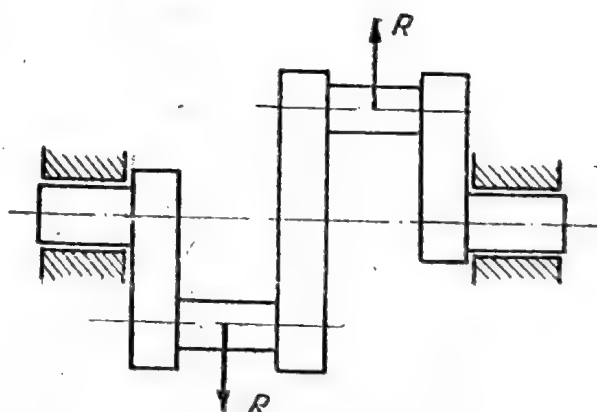


Fig. 13.2.

general aceleași efecte. Pentru echilibrarea forțelor de inerție din primul caz se folosesc două mase adiționale așezate ca în

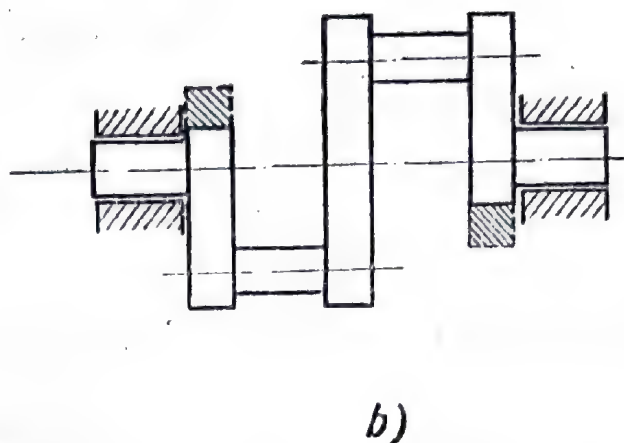
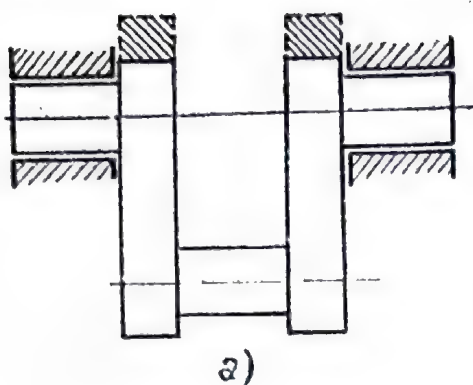


Fig. 13.3.

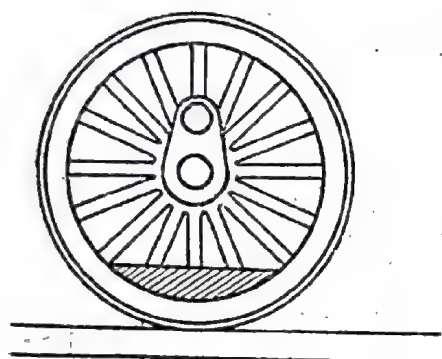


Fig. 13.4.

figura 13.3, *a* iar pentru echilibrarea cuplului de inerție din cel de-al doilea caz se folosesc două mase adiționale dispuse ca în figura 13.3, *b*.

În același scop se montează și contragreutatea din partea opusă manetonului de acționare al roții motoare a unei locomotive (fig. 13.4).

#### 4. Funcționarea unei mașini.

a) **Fazele mișcării unei mașini; tahograma mișcării; viteza medie; coeficient de neregularitate.** Din momentul pornirii unei mașini până în momentul opririi, ea parcurge în general următoarele trei faze:

— *faza de pornire* (demarajul); în această fază vitezele tuturor organelor mobile ale mașinii cresc încontinuu până la o anumită valoare, care reprezintă începutul fazei următoare;

— *faza de regim*; în această fază vitezele organelor mobile ale mașinii se consideră constante; în realitate însă, vitezele diferitelor organe mobile ale mașinii oscilează în jurul unei valori medii care reprezintă viteza de regim a mașinii respective;

— *faza de oprire*; în această fază se petrece un proces invers celui care se petrece în faza de pornire: vitezele tuturor organelor mobile ale mașinii descresc pînă la valoarea zero.

Să presupunem că mașina respectivă este antrenată de un motor; diagrama de variație a vitezei unghiulare a arborelui principal pe toată durata celor trei faze se numește *tahograma* mașinii respective. Timpul total de funcționare a mașinii  $T$  este suma timpurilor duratei de pornire ( $t_p$ ), duratei de regim ( $t_r$ ) și duratei de oprire ( $t_o$ ):

$$T = t_p + t_r + t_o.$$

Din această diagramă (fig. 13.5) se vede că mișcarea de regim este o mișcare periodică; viteza unghiulară a arborelui principal variază între două valori: maximă ( $\omega_{max}$ ) și minimă ( $\omega_{min}$ ), astfel încît viteza unghiulară medie a acestui arbore este:

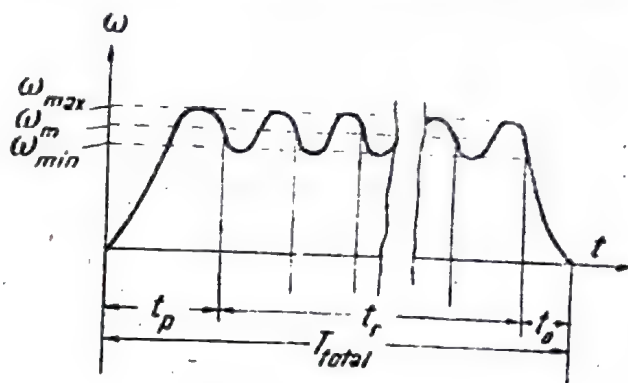


Fig. 13.5.

$$\omega_m = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \quad (13.1)$$

Mărimea  $\delta$  dată de relația:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m} \quad (13.2)$$

se numește *gradul de neregularitate* al mașinii. Intervalul de variație al gradului de neregularitate pentru diferite mașini este dat în tabele; iată câteva valori:

generatori electrice . . . . .	$\delta = 0,003 \dots 0,006$
mașini-unelte . . . . .	$\delta = 0,025 \dots 0,03$
prese, foarfece mecanice . . . . .	$\delta = 0,10 \dots 0,20.$

b) **Bilanțul energetic al mașinii.** Să aplicăm teorema energiei cinetice între momentele  $t_1$  și  $t_2$ ; pentru aceasta vom nota:

- $E_1$  energia cinetică la momentul  $t_1$ ,
- $E_2$  energia cinetică la momentul  $t_2$ ,
- $L_m$  lucrul mecanic motor,
- $L_u$  lucrul mecanic util,
- $L_p$  lucrul mecanic al rezistențelor pasive.



După cele cunoscute din dinamică, teorema energiei cinetice în intervalul de timp considerat se scrie :

$$E_2 - E_1 = L_m - L_u - L_p. \quad (13.3)$$

Să aplicăm acum această ecuație pentru toate cele trei faze ale mașinii.

*Faza de pornire.* Vom alege intervalul de timp  $0 - t_p$ , adică vom aplica ecuația (13.3) pentru  $t_1 = 0$  și  $t_2 = t_p$ . În acest caz vom avea  $E_2 \neq 0$ , deoarece la  $t_2 = t_p$  mașina a ajuns la viteza de regim, și  $E_1 = 0$  deoarece la  $t_1 = 0$  toate vitezele organelor mobile ale mașinii erau nule. Rezultă :

$$E_2 = L_m - L_u - L_p. \quad (13.4)$$

Diferența de lucru mecanic  $L_m - (L_u + L_p)$  produce creșterea vitezelor organelor mobile ale mașinii. Dacă este posibil, pentru aducerea și mai rapidă a mașinii la faza de regim, această diferență este făcută și mai mare prin anularea termenului  $L_u$ , adică prin ceea ce se numește pornire în gol a mașinii respective. În acest caz avem :

$$E_2 = L_m - L_p. \quad (13.5)$$

Asemenea exemple de pornire în gol avem în cazul motorului unui automobil sau al unui laminor.

*Faza de regim.* Vom alege acum intervalul de timp  $t_p - t_r$ , adică vom aplica ecuația (13.3) pentru  $t_1 = t_p$  și  $t_2 = t_r$ .

În acest caz, vitezele organelor mobile ale mașinii fiind aceleași și pentru valoarea  $t_1 = t_p$  și pentru  $t_2 = t_r$ , vom avea  $E_1 = E_2$ ; valoarea comună a energiei este egală cu energia cinetică a mașinii de la sfârșitul fazei precedente ; ecuația (13.3) devine deci :

$$L_m - L_u - L_p = 0$$

sau

$$L_m = L_u + L_p, \quad (13.6)$$

adică în timpul funcționării de regim al unei mașini, lucrul mecanic motor se consumă în întregime în lucru mecanic util și pasiv, nemaiavînd loc nici o creștere de energie a organelor mobile. Cu toate acestea, în timpul acestei faze au totuși loc variații de energie datorită fluctuațiilor vitezelor ; de aceea, concluzia de mai sus trebuie considerată ca valabilă pe durata unui ciclu de funcționare și nu în fiecare moment.

**Faza de oprire.** Se alege intervalul de timp  $t_1 - t_2$ , adică se aplică ecuația (13.3) pentru  $t_1 = t_r$  și  $t_2 = t_o$ . Deoarece pentru  $t_2 = t_o$  mașina se oprește, vom avea  $E_2 = 0$ . Energia cinetică  $E_1$  a mașinii la momentul  $t_1 = t_r$  este egală cu energia cinetică din timpul fazei precedente. În această perioadă se întrerupe furnizarea de lucru mecanic motor ( $L_m = 0$ ), iar lucrul mecanic al rezistențelor pasive este mărit foarte mult valoarea  $L'_p \gg L_p$  cu ajutorul unor dispozitive speciale, denumite frâne. Înlocuind în ecuația (13.3) obținem :

$$\begin{aligned} \text{sau} \quad 0 - E_1 &= -L_u - L'_p \\ E_1 &= L_u + L'_p, \end{aligned} \quad (13.7)$$

adică întreaga energie cinetică a mașinii este consumată în lucrul mecanic util și în lucrul mecanic al rezistențelor pasive ale mașinii și al organelor de frînare.

c) **Randamentul mecanic al mașinii** se calculează numai pentru faza de regim ; el are valoarea :

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} = 1 - \frac{L_p}{L_m}. \quad (13.8)$$

## 5. Reglarea mersului unei mașini; volanți, regulatori, frâne

a) **Variațiile vitezelor organelor mobile ale mașinilor.** După cum am arătat în tahograma din figura 13.5, vitezele unghiulare ale organelor mobile ale unui mașini nu sînt în general constante ci suferă anumite variații. Aceste variații sînt de două feluri :

— *variații periodice*, în urma cărora viteza organului de mașină mobil considerat se schimbă oscilînd însă în jurul unei valori medii, și

— *variații neperiodice*, în urma cărora viteza organului de mașină mobil considerat fie crește continuu, fie scade continuu, pînă devine zero.

În diagrama din figura 13.5 se vede că asemenea variații au loc în tot timpul funcționării mașinii ; astfel, în prima și ultima fază au loc variații neperiodice, iar în faza de regim au loc variații periodice. Dintr-o defecțiune oarecare, se poate întâmpla însă ca și în timpul fazei de regim să apară variații ne-

periodice ; astfel, la o creștere sau o scădere bruscă a sarcinii, mașina își încetinește viteza pînă la oprire sau se ambalează pînă la distrugere. După cîte este cunoscut din practică, atît variațiile periodice cît și cele neperiodice sînt în general nedorite și se caută să fie atenuate prin diverse dispozitive suplimentare, denumite *dispozitive de reglaj* ; ele vor fi descrise în cele ce urmează.

b) **Dispozitive pentru atenuarea variațiilor periodice ; volantul.** Din ecuația (13.6) rezultă că pentru ca energia cinetică a mașinii în timpul perioadei de regim să fie riguros constantă trebuie ca :

$$L_m = L_u + L_p.$$

În general este însă foarte greu de menținut această egalitate ; de aceea, la un moment dat avem fie :

$$L_m > L_u + L_p, \quad (13.9)$$

fie :

$$L_m < L_u + L_p. \quad (13.10)$$

În primul caz mașina se ambalează datorită excesului de lucru mecanic motor, iar în cel de-a doilea ea își micșorează viteza provocînd fluctuațiile periodice despre care am vorbit mai sus. Micșorarea intervalului de variație al vitezelor organelor mobile ale mașinii se face cu un dispozitiv denumit *volant*. Volantul este o roată grea fixată pe arborele principal al mașinii, avînd un moment de inerție mare în raport cu axa de rotație. Volantul lucrează ca un acumulator de energie înmagazinînd energie cînd mișcarea se accelerează, pe care o restituie apoi cînd mișcarea se încetinește. Volantul prezintă însă dezavantajul că îngreunează totodată atît pornirea cît și oprirea mașinii.

Momentul de inerție al volantului în raport cu axa de rotație se determină prin calcul, astfel încît să obținem pentru coeficientul de neregularitate valoarea prescrisă în funcție de felul și destinația mașinii respective.

Să considerăm un ciclu de funcționare al mașinii cînd viteza unghiulară a arborelui principal pe care este montat volantul variază între limitele  $\omega_{min}$  și  $\omega_{max}$  și să notăm cu  $I$  momentul de inerție al volantului (neglijînd momentul de inerție la celelalte piese) și cu  $L$  diferența lucrurilor mecanice  $L_m - (L_u + L_p)$  în intervalul acestui ciclu. Aplicînd teorema energiei cinetice avem :

$$\frac{1}{2} J \omega_{max}^2 - \frac{1}{2} I \omega_{min}^2 = L, \quad (13.11).$$



de unde :

$$I = \frac{2L}{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2} = \frac{2L}{(\omega_{max} - \omega_{min})(\omega_{max} + \omega_{min})} \quad (13.12)$$

Dar din formulele (13.1) și (13.2) deducem :

$$\omega_{max} - \omega_{min} = 2\delta\omega_m,$$

$$\omega_{max} + \omega_{min} = 2\omega_m,$$

cu care obținem :

$$I = \frac{L}{\omega_m^2 \delta} \quad (13.13)$$

c) **Dispozitive pentru prevenirea variațiilor neperiodice; regulatori.** În cazul în care din anumite cauze variația mișcării mașinii nu este periodică, mașina se poate opri sau ambala, iar volantul nu poate preveni această situație ci numai s-o atenueze. Cu alte cuvinte, volantul nu poate servi la menținerea unei stări de regim; pentru aceasta se întrebuițează alte dispozitive, denumite *regulatori*. Regulatorii sînt dispozitive care mențin starea de regim a unei mașini prin acțiune automată directă asupra forței motoare pe care o micșorează cînd vitezele cresc și o măresc cînd vitezele descresc.

Cele mai răspîndite regulatoare întîlnite în practică sînt regulatoarele centrifugale (care acționează pe baza forței centrifuge) și care pot fi cu acțiunea directă asupra agentului motor sau cu acțiunea indirectă, cînd acționează prin intermediul unui servo-motor. O schemă simplificată de reglaj cu servomecanism este

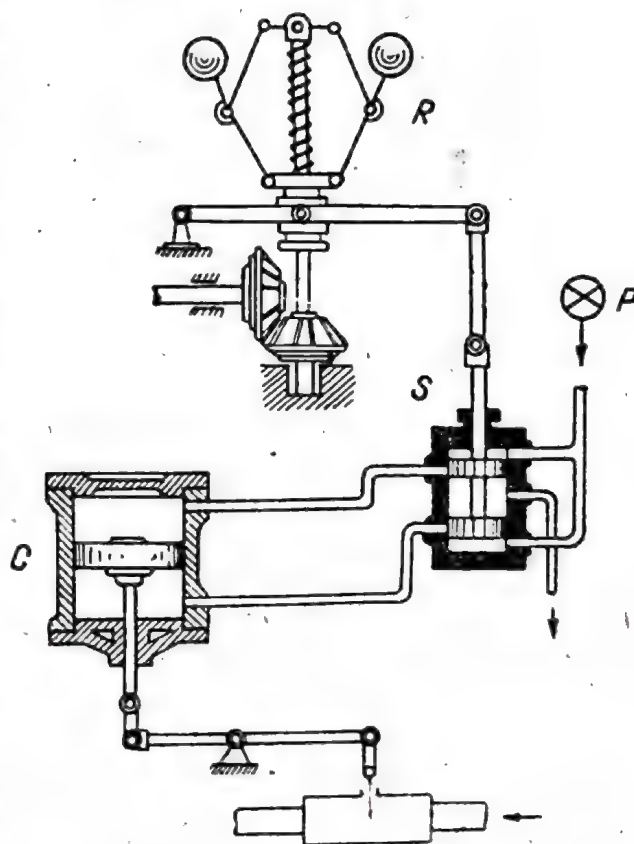


Fig. 13.6.

arătată în figura 13.6. Regulatorul  $R$  transmite variațiile sale servomecanismului  $S$ , alimentat de la o pompă de ulei  $P$ ; acesta, la rîndul său, transmite variațiile de presiune cilindrului  $C$  (care este solidar cu ventilul de reglaj) de alimentare a unei turbine, pe care-l închide sau îl deschide, după cum îi comandă regulatorul  $R$ .

Vom descrie în cele ce urmează două tipuri de regatoare care sînt cele mai răspîndite.

**Regulatorul Watt.** În figura 13.7 este arătată schema acestui regulator. El se compune dintr-un arbore vertical  $Oy$ , care primește mișcarea de rotație cu viteza unghiulară  $\omega$  de la arborele conducător al mașinii, care se rotește cu viteza unghiulară  $\omega_1$

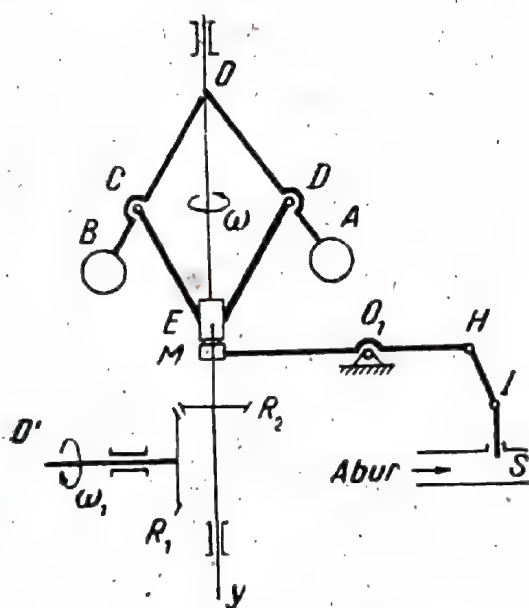


Fig. 13.7.

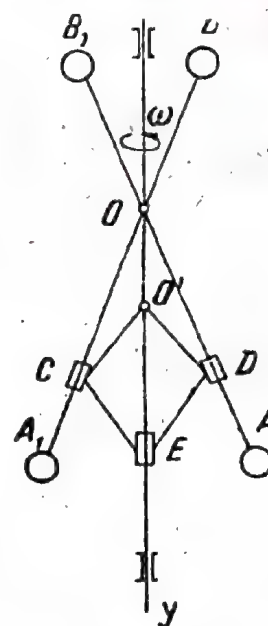


Fig. 13.8.

prin intermediul unui angrenaj conic compus din roțile  $R_1$  și  $R_2$ . De arborele  $Oy$  sînt articulate barele egale  $OA$  și  $OB$  la extremitățile cărora se găsesc montate două bile avînd aceeași greutate. În lungul arborelui  $Oy$  poate culisa un manșon  $M$ , legat de barele  $OA$  și  $OB$  prin intermediul barelor  $CE$  și  $DE$ . Prin intermediul unui sistem de pîrghii  $MH$  și  $HI$ , manșonul  $M$  acționează asupra supapei  $S$  de admitere a aburului în cilindru. Cînd viteza unghiulară  $\omega_1$  a arborelui conducător al mașinii crește, bilele  $A$  și  $B$  se depărtează de arborele regulatorului, datorită forțelor centrifuge ale bilelor; în același timp, manșonul  $M$  se ridică închizînd supapa  $S$  de admitere a aburului. Invers, cînd viteza unghiulară  $\omega_1$  scade, supapa  $S$  se deschide mărind admisia aburului.

**Regulatorul lui Rankine.** Schema acestui regulator este arătată în figura 13.8. El este format dintr-un mecanism cu două articulații  $O$  și  $O'$ , fixat pe arborele regulatorului. În punctele  $A$  și  $A_1$  se află câte o bilă de greutate  $P$ , iar în  $B$  și  $B_1$  câte o bilă de greutate  $Q$ . În  $C$  și  $D$  se află două manșoane care alunecă în lungul barelor  $OA$  și  $OA_1$ , iar în  $E$  se află un manșon care alunecă în lungul arborelui regulatorului și acționează asupra supapei de admisie a aburului.

d) **Frâna.** Pentru încetinirea mersului unei mașini (în special în caz de ambalare), pentru oprirea mașinilor sau pentru securitatea muncii (prevenirea accidentelor), mașinile sînt prevăzute cu un dispozitiv denumit *frînă*. Frîna poate fi acționată în diferite moduri: manual, mecanic, electric, pneumatic, hidraulic. În figura 13.9 sînt arătate două tipuri de frînă, și anume: o frînă cu sabot (fig. 13.9, a) și o frînă cu bandă (fig. 13.9, b).

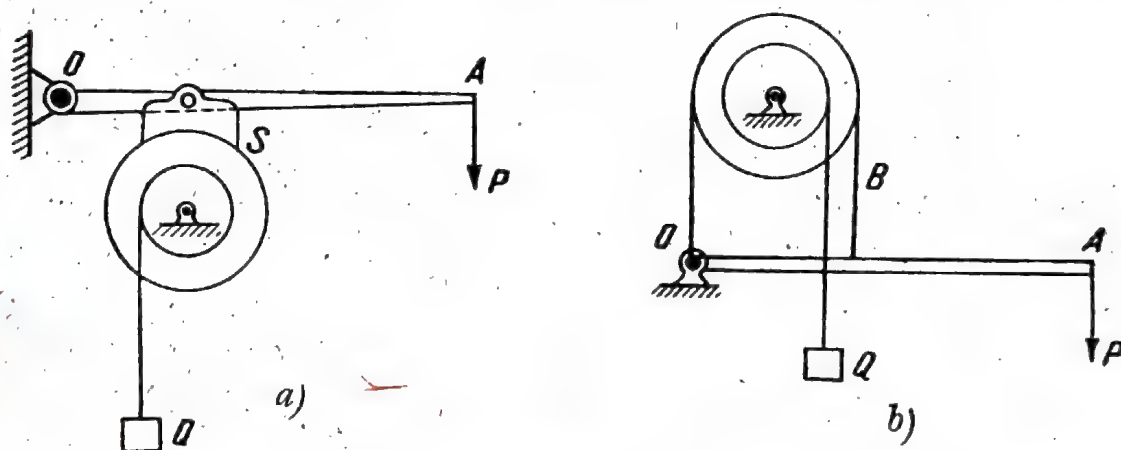


Fig. 13.9.

Prin acționarea pîrghiei  $OA$ , forța  $P$  este transmisă în primul caz sabotului  $S$ , iar în cel de-al doilea caz benzii  $B$ , care prin contact cu un tambur de frînă îi încetinește mersul datorită forțelor care iau naștere între sabot, respectiv banda de frînă și tambur.

## 6. Forța de inerție în tehnică

Forța de inerție centrifugă are foarte multe aplicații în tehnică: astfel, pe baza forței centrifuge s-au construit o serie de aparate și mașini și s-au imaginat procedee tehnologice de elaborare a unei serii de piese folosite în construcția mecanismelor și a mașinilor. Vom descrie în cele ce urmează câteva asemenea aparate.



a) **Regulatorul centrifugal** este un dispozitiv întrebuințat la reglarea admisiei aburilor într-o mașină sau turbină cu abur. Prin varierea vitezei de rotație, bilele regulatorului se apropie când viteza scade sau se depărtează când viteza crește, deschizând în primul caz și închizând în cel de-al doilea admisia aburului. Două tipuri de regulatoare au fost descrise mai sus. În figura 13.10 este arătat un regulator centrifugal care acționează direct admisia aburului.

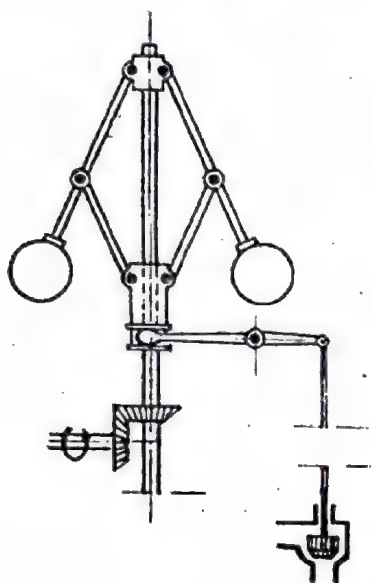


Fig. 13.10.

b) **Uscătoare și separatoarele centrifuge** sînt aparate compuse în principiu dintr-un cilindru găurit, care se rotește cu viteză foarte mare în interiorul unei cuve (fig. 13.11). Aparatele bazate pe acest principiu servesc la uscarea rufelor ude (un asemenea aparat este montat la unul din tipurile de mașini de spălat rufe fabricat în R.P.R.), la separarea zahărului cristalizat din melasă, la scoaterea mierii din fagure, la separarea serurilor din sînge, în general la separarea a două lichide de

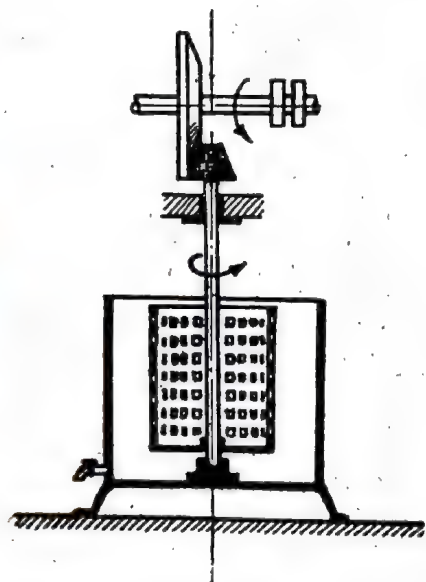


Fig. 13.11.

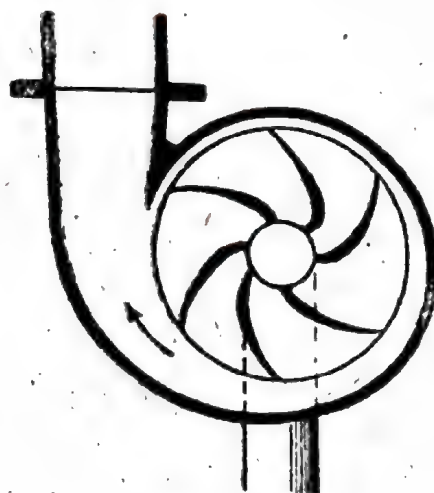


Fig. 13.12.

densități diferite, la eliminarea particulelor în suspensie dintr-un lichid (de exemplu clarificarea vinurilor, epurarea uleiurilor etc.).

c) Ventilatoarele și pompele centrifuge sînt mașini compuse dintr-un ax mobil, avînd montat la periferia sa o serie de palete profilate ca în figura 13.12 și închise într-un corp de

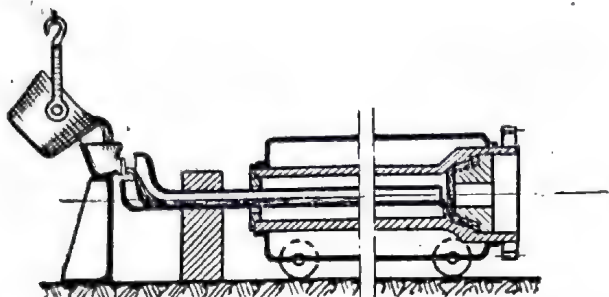


Fig. 13.13.

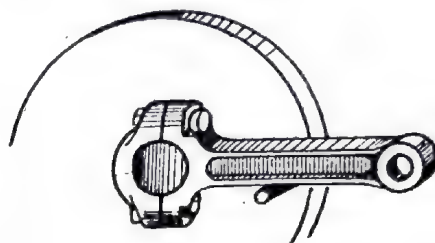


Fig. 13.14.

pompă. Cînd corpul de pompă este plin cu apă, se pornește pompa; axul cu palete începe să se rotească cu viteză mare, antrenînd lichidul pe care-l aruncă la periferie, formînd o depresiune în centrul roții, fapt care provoacă urcarea lichidului în conducta de aspirație. Ventilatorul centrifugal funcționează pe același principiu, fluidul aspirat fiind însă aer sau un alt gaz.

d) Turnarea centrifugală constituie unul dintre procedeele de fabricație al conductelor de fontă, care permite să se obțină produse foarte omogene (fig. 13.13). Prin rotirea formei care este răcită la exterior cu o cămașă de apă, materialul topit este proiectat pe partea interioară a formei, unde se dispune după pereții acesteia. Printr-un procedeu asemănător se reglează și bielele motoarelor prin stîngere între două platouri care se rotesc cu o turație de 900—1 000 rot/min (fig. 13.14).

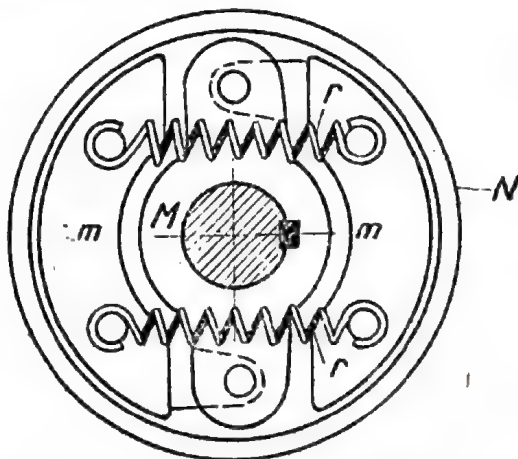


Fig. 13.15.

e) Ambreiajele automate centrifugale (fig. 13.15) se compun dintr-un manșon  $M$  calat pe arborele motor, două mase  $m$  articulate pe manșonul  $M$ , două resorturi  $r$  și un ax  $N$ , solidar cu mecanismul care trebuie antrenat. Cînd viteza motorului crește, masele  $m$ , sub acțiunea forțelor centrifuge, se depărtează din poziția din figura 13.15 și vin în contact cu partea interioară

a axului  $N$ . Antrenarea arborelui  $N$  are loc progresiv, fără șocuri. Când turația arborelui motor  $M$  scade, forțele centrifuge devin mai mici, astfel încât efectul lor este învins de forța elastică a resoartelor și se produce debreiajul.

f) Înfășurările roților mașinilor electrice sînt protejate împotriva smulgerii lor din lăcaș datorită forțelor de inerție centrifuge cu ajutorul unor bucăți de carton montate între două praguri ale rotorului (fig. 13.16).

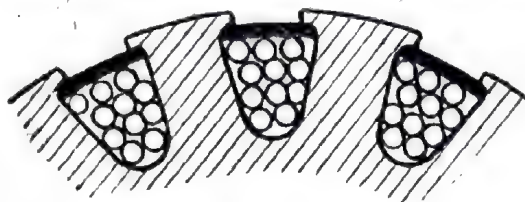


Fig. 13.16.

g) Turnarea centrifugală a stîlpilor de beton armat folosiți în construcția liniilor electrice aeriene constituie un procedeu

al tehnicii noi care duce la economisirea a mii de tone de metal.

Fabricația acestor stîlpi a început la noi în țară în anul 1953, la atelierele „Titan” ale Întreprinderii de construcții metalice și prefabricate nr. 7 din București.

În prezent se experimentează la aceeași întreprindere execuția stîlpilor de beton centrifugat precomprimat.

Construcția liniilor aeriene pentru dezvoltarea rețelei energetice de la noi, din țară, pe baza Directivelor Congresului al III-lea al P.M.R., prevede ca în cursul anului 1965 să se livreze 50 000 de asemenea stîlpi.

## Capitolul XIV

### DIMENSIUNILE ȘI UNITĂȚILE DE MĂSURĂ ALE MĂRIMILOR MECANICE

#### 1. Mărime fizică; măsurare

Diferitele stări ale materiei sînt caracterizate printr-o serie de mărimi fizice determinate, între care se stabilesc o serie de legi; pentru stabilirea acestor legi este necesară măsurarea mărimilor fizice.

A măsura o mărime fizică oarecare  $A$  înseamnă a o compara cu o altă mărime  $U$  de aceeași natură cu mărimea de mă-



surat și care este aleasă ca termen de comparație; mărimea  $U$  poartă numele de *unitate de măsură*.

Rezultatul măsurătorii este un număr  $n$ , care arată de câte ori unitatea de măsură  $U$  se cuprinde în mărimea  $A$ , adică :

$$n = \frac{A}{U}. \quad (14.1)$$

Numărul  $n$  se numește *valoarea numerică* a mărimii  $A$  sau *măsura* mărimii. Mărimea fizică măsurată se exprimă sub forma unui produs dintre valoarea numerică și unitatea de măsură :

$$A = nU, \quad (14.2)$$

adică :

mărimea de măsurat = valoarea numerică  $\times$  unitatea.

Aceasta este ecuația fundamentală a măsurării.

Măsurile se execută experimental cu ajutorul unor instrumente, denumite *aparate de măsurat*, care servesc la compararea mărimii de măsurat cu unitatea de măsură, în limitele unor anumite erori datorite metodelor sau aparatului de măsurat folosit.

## 2. Mărimi și unități fundamentale și derivate; sisteme de unități

Deoarece diferitele mărimi fizice sînt legate între ele prin anumite relații, nu este nevoie să alegem pentru fiecare mărime câte o unitate, așa cum ar rezulta din cele de mai sus. De aceea vom alege o serie de mărimi fizice pe care le vom denumi *mărimi fundamentale*, iar unitățile lor de măsură *unități fundamentale*, iar restul mărimilor fizice deduse din cele fundamentale pe baza relațiilor care le leagă de acestea le vom denumi *mărimi derivate* și unitățile lor, *unități derivate*. Mărimile fundamentale se aleg astfel încît să fie independente între ele.

Mărimile fundamentale alese pentru un anumit domeniu de măsurare formează sistemul fundamental de măsură, iar mărimile derivate formează sistemul de unități.

În *sistemele fizice* folosite în mecanică se aleg drept mărimi fundamentale lungimea ( $L$ ), masa ( $M$ ) și timpul ( $T$ ), iar în cele *tehnice* lungimea ( $L$ ), forța ( $F$ ) și timpul ( $T$ ).

Mărimile și unitățile fundamentale de măsură ale diferitelor sisteme sînt arătate în tabela 14.1.

Tabela 14.1

## Mărimi și unități fundamentale de măsură

Sisteme	Unități de măsură folosite				Denumiri secundare
Sisteme fizice	Denumire	L	M	T	—
	CGS	1 cm	1 g (m)	1 s	Sistem fizic
	MKS	1 m	1 kg (m)	1 s	Sistem fizic practic
	MTS	1 m	1 t (m)	1 s	Sistem fizic industrial
Sisteme tehnice	Denumire	L	F	T	—
	MKS	1 m	1 kgf	1 s	—

## 3. Dimensiunea unei mărimi

Pentru a putea calcula valoarea numerică a unei mărimi la trecerea de la un sistem de unități la altul, trebuie alcătuită așa-numita *ecuație de dimensiuni* a mărimii respective. Ea este o relație care se exprimă prin produsul unităților fundamentale ridicate la diferite puteri  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ :

$$[A] = L^\alpha M^\beta T^\gamma, \quad (14.3)$$

$[A]$  reprezentând dimensiunea mărimii  $A$ .

Exemplu: Dimensiunea vitezei este:

$$[v] = \frac{L}{T},$$

deoarece ea este un raport de lungime și timp. Ca s-o aducem la forma (14.3) o scriem astfel:

$$[v] = L^1 T^{-1} M^0,$$

deci ea este un caz particular al formei (14.3) pentru:

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 0;$$

ele reprezintă dimensiunile mărimii  $v$ .

#### 4. Omogenitatea

Legile fizice exprimă în general egalități între mărimi fizice. Principiul omogenității afirmă că orice egalitate între mărimi fizice are sens numai atunci când dimensiunile termenilor care intervin în egalitate sînt aceleași.

*Exemplu.* Să considerăm formula perioadei pendulului :

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (14.4)$$

Deoarece numărul  $2\pi$  este adimensional avem :

$$[t] = \left[ \sqrt{\frac{l}{g}} \right]$$

$t$  este un timp,  $l$  o lungime, iar  $g$  o accelerație; cum accelerația este o mărime derivată în sistemul LMT, va trebui s-o exprimăm în funcție de mărimile fundamentale; avem

$$[g] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2},$$

iar pentru celelalte două mărimi :

$$[t] = T, \quad [l] = L.$$

Înlocuind în relația (14.4) obținem :

$$T = \sqrt{\frac{L}{LT^{-2}}} = \sqrt{T^2} = T.$$

#### 5. Unități fundamentale ale sistemelor generale

a) **Unități de lungime.** În sistemul MKS, unitatea fundamentală de lungime este metru (m). Metrul este lungimea, la temperatura de  $0^\circ\text{C}$ , a prototipului internațional de platină iridiată, aprobat în 1889 de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți, și păstrat la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți din Sèvres — Franța.

În R.P.R. servește ca etalon național prototipul nr. 6 c, atribuit în acest scop în 1895 de Conferința Generală de Mă-



Tabela 14.2

## Unitățile mărimilor geometrice și mecanice

Mărimea	Simbol	Ecuația de definiție	Dimensiuni în sistemul		Unități în sistemul		
			L <sup>M</sup> T <sup>-1</sup>	L <sup>M</sup> T <sup>-1</sup>	CGS	MKS	MKS
Lungime	$l$	—	L	L	cm	m	m
Masă	$m$	$m = \frac{F}{a}$	M	$L^{-1}P^2$	g	kg	$\frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} = \mu$
Timp	$t$	—	T	T	s	s	s
Arie	$A$	$A = l^2$	L <sup>2</sup>	L <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>
Volum	$V$	$V = l^3$	L <sup>3</sup>	L <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>
Unghi plan	$\theta$	$\theta = \frac{s}{r}$	I	I	rad	rad	rad
Viteză	$v$	$v = \frac{s}{t}$	L <sup>1</sup> T <sup>-1</sup>	L <sup>1</sup> T <sup>-1</sup>	cm/s	m/s	m/s
Accelerație	$a$	$a = \frac{v}{t}$	L <sup>1</sup> T <sup>-2</sup>	L <sup>1</sup> T <sup>-2</sup>	cm/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
Viteză unghiulară	$\omega$	$\omega = \frac{\theta}{t}$	T <sup>-1</sup>	T <sup>-1</sup>	rad/s	rad/s	rad/s
Accelerație unghiulară	$\epsilon$	$\epsilon = \frac{\omega}{t}$	T <sup>-2</sup>	T <sup>-2</sup>	rad/s <sup>2</sup>	rad/s <sup>2</sup>	rad/s <sup>2</sup>
Perioadă	$T$	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	T	T	s	s	s

Frecvență	$f = \frac{1}{T}$	$T^{-1}$	Hz	Hz	Hz
Forță	$F = ma^{**}$	$LT^{-2}$	dyn	N	kgf
Percușiune	$P = Ft$	$FT$	dyn·s	N·s	kgf·s
Momentul unei forțe (cuplu)	$M = Fl$	$LF$	dyn·cm	N·m	kgf·m
Impuls (cantitate de mișcare)	$H = mv$	$FT$	$\frac{g \cdot cm}{s}$	$\frac{kg \cdot m}{s}$	$\frac{u \cdot m}{s}$
Energie	$E = \frac{1}{2}mv^2$	$LF$	erg	J	kgm
Lucru mecanic	$L = Fl \cos(\varphi, l)$	$LF$	erg	J	kgm
Putere	$P = \frac{L}{t}$	$LFT^{-1}$	erg/s	W	kgm/s
Moment de inerție al masei	$J = ml^2$	$LFT^2$	$g \cdot cm^2$	$kg \cdot m^2$	$u \cdot m^2$
Moment cinetic	$K = mvr = J\omega$	$LFT$	$\frac{g \cdot cm^2}{s}$	$\frac{kg \cdot m^2}{s}$	$\frac{u \cdot m^2}{s}$
Presiune	$P = \frac{F}{A}$	$L^{-2}F$	dyn/cm <sup>2</sup>	N/m <sup>2</sup>	kgf/m <sup>2</sup>
Masă specifică, densitate	$\rho = \frac{m^{**}}{V}$	$L^{-3}MT^{-3}$	g/cm <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>	kgf·s <sup>2</sup> /m <sup>4</sup>
Greutatea specifică	$\gamma = \frac{G}{V}$	$L^{-3}F$	dyn/cm <sup>3</sup>	N/m <sup>3</sup>	kgf/m <sup>3</sup>

\* Definiția în sistemul MKS

\*\* Definiția în sistemul MKS și CGS

suri și Greutăți. El se află în păstrarea Direcției Generale pentru Metrologie, Standarde și Invenții.

În sistemul CGS : centrimetrul (cm) este a șuta parte din metrul definit mai sus.

b) **Unitățile de masă.** În sistemul MKS, unitatea de masă este kilogramul (kg). Kilogramul este masa prototipului internațional de platină iridiată, aprobat în anul 1889 de Conferința Generală de Măsură și Greutăți și păstrat la Biroul Internațional de Măsură și Greutăți din Sèvres — Franța.

În R.P.R. servește ca etalon național prototipul nr. 2, atribuit în acest scop de Conferința Generală de Măsură și Greutăți din 1889. El se află în păstrarea Direcției Generale pentru Metrologie, Standarde și Invenții.

În sistemul CGS : gramul (masă) este 1/1 000 din kg (masă) definit mai sus.

c) **Unitatea de timp.** În toate sistemele, unitatea fundamentală de timp este secunda (s). Secunda (de timp mijlociu) reprezintă a 86 400-a parte a zilei solare mijlocii.

Anul tropic (adică intervalul mijlociu dintre două treceri consecutive ale Soarelui în punctul echinoxial mijlociu de primăvară) are 365,24219879 zile solare mijlocii.

Ora standard și implicit secunda sînt determinate de Biroul Internațional al Orei din Paris.

Conservarea și difuzarea orei în R.P.R. este în sarcina Observatorului Astronomic din București.

d) **Unitatea de forță este kilogramul-forță (kgf).** Kilogramul-forță este forța a cărei valoare este egală cu greutatea prototipului internațional de masă, definit mai sus, măsurat în vid, la accelerația normală a gravitației de  $9,80665 \text{ m/s}^2$ .

În afară de unitățile fundamentale definite mai sus, mai sînt și unitățile derivate, dependente de sistemul ales. Pentru unitățile fundamentale și unitățile derivate s-a întocmit tabela 14.2.

## 6. Aplicații

1. Să se exprime în sistemul de unități tehnic, fizic (CGS) și practic (MKS) masa și greutatea unei sfere pline de fier de rază  $r = 30 \text{ cm}$  și densitate  $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$ .



### Rezolvare

Notînd cu  $M$  masa și  $G$  greutatea :

$$M = V\gamma = \frac{4}{3}\pi(30)^3 \cdot 7,8 \approx 882\,000 \text{ grame masă (CGS)}$$

$$M = 882 \text{ kg (MKS)} = \frac{882}{9,81} = 90 \text{ (unități tehnice de masă)}$$

$$G = Mg = 882\,000 \times 981 \approx 8\,650 \times 10 \text{ dine (dyn)}$$

$$G = 8\,650 \text{ newton (N)}$$

$$G = 882 \text{ kilograme-forță (kgf)}.$$

2. Să se determine în kgf/s, erg/s, kW și CP puterea unei locomotive ce înaintează cu viteza  $v = 60 \text{ km/h}$  și produce o forță de tracțiune  $T = 8\,000 \text{ kgf}$ .

### Rezolvare

Puterea  $P$  cerută este :

$$P = T \times v = 8\,000 \times \frac{60}{36} = 1333\,300 \text{ kgfm/s}$$

$$P = 133\,300 \times 9,81 = 1\,307\,700 \text{ W} = 1\,307,7 \text{ kW}$$

$$P = 1\,307,7 \times 10^{10} \text{ erg/s}$$

$$P = 1\,307,7 \times 1,36 = 1\,777 \text{ CP}.$$

## TABLA DE MATERII

### Partea I

#### Generalități

#### Cap. I. Noțiunile fundamentale, obiectul, părțile mecanicii

1. Obiectul mecanicii	5
2. Materia și mișcarea; mișcarea mecanică a materiei	6
3. Spațiul și timpul	7
4. Masa	8
5. Forța	8
6. Caracterul relativ al mișcării mecanice; repausul	12
7. Studiul echilibrului și mișcării corpurilor de care se ocupă mecanica	13
8. Bazele geometrice ale echilibrului și mișcării	15
9. Părțile mecanicii	18

### Partea a II-a

#### Staticea sistemelor materiale

#### Cap. II. Prima problemă a staticii: reducerea sistemelor de forțe

1. Generalități	19
2. Forța ca vector; reprezentarea și măsurarea forțelor	19
3. Noțiunile elementare despre vectori	22
4. Noțiuni de bază privind reducerea sistemelor de forțe	27
5. Reducerea într-un punct a diferitelor sisteme de forțe	38
6. Metode generale pentru reducerea sistemelor de forțe	46

7. Reducerea sistemelor de forțe paralele considerate ca vectori legați . . . . .	54
8. Aplicații . . . . .	65
<b>Cap. III. A doua problemă a staticii: studiul echilibrului sistemelor materiale</b>	
1. Generalități . . . . .	69
2. Legăturile sistemelor materiale . . . . .	70
3. Mărimile care intervin în studiul echilibrului unui sistem material . . . . .	77
4. Metoda analitică pentru studiul echilibrului sistemelor materiale . . . . .	78
5. Metoda grafică pentru studiul echilibrului sistemelor materiale . . . . .	82
6. Aplicarea metodelor analitică și grafică la studiul echilibrului sistemelor materiale libere și supuse la legături . . . . .	85
7. Frecări; echilibrul cu frecare . . . . .	88
8. Stabilitatea echilibrului . . . . .	103
9. Aplicații . . . . .	105
<b>Cap. IV. Aplicații tehnice ale staticii</b>	
1. Planul înclinat . . . . .	112
2. Pîrghia . . . . .	113
3. Scripetii . . . . .	116
4. Pana . . . . .	121
5. Grinzi cu zăbrele . . . . .	123

#### Partea a III-a

#### Cinematica sistemelor materiale

<b>Cap. V. Probleme generale; noțiuni introductive în cinematică</b>	
1. Obiectul cinematiei . . . . .	128
2. Subîmpărțirile cinematiei . . . . .	128
3. Scurt istoric . . . . .	129
4. Importanța tehnică a cinematiei . . . . .	129
5. Noțiunile de bază ale cinematiei; unități de măsură . . . . .	129
6. Sisteme de referință; mișcarea absolută și relativă . . . . .	130
7. Poziție; mișcare; repaus . . . . .	131
8. Deplasarea . . . . .	133
9. Traiectorie . . . . .	133
10. Viteză . . . . .	133
11. Accelerație . . . . .	136
12. Studiul cinematic al mișcării mecanice . . . . .	138
13. Diagramele mișcării . . . . .	139
14. Mișcarea uniformă . . . . .	139
15. Mișcarea uniform variată . . . . .	142
16. Mișcarea oscilatorie armonică . . . . .	145



Cap. VI. <i>Cinematica sistemelor materiale în raport cu un reper fix</i>	
1. Cinematica punctului material . . . . .	149
2. Cinematica solidului rigid . . . . .	164
3. Aplicații . . . . .	185
Cap. VII. <i>Cinematica sistemelor materiale în raport cu un sistem mobil</i>	
1. Mișcarea relativă a punctului material (compunerea mișcărilor simultane ale punctului) . . . . .	187
2. Mișcarea relativă a solidului rigid (compunerea mișcărilor simultane ale unui solid rigid) . . . . .	192
3. Aplicații . . . . .	199
Cap. VIII. <i>Aplicațiile tehnice ale cinematicii</i>	
1. Mecanisme cu elemente flexibile . . . . .	202
2. Mecanisme cu roți . . . . .	204
3. Aplicații . . . . .	211

#### Partea a IV-a

#### Dinamica sistemelor materiale

Cap. IX. <i>Probleme generale; noțiuni introductive în dinamică</i>	
1. Obiectul dinamicii . . . . .	214
2. Subîmpărțirile dinamicii; scurt istoric . . . . .	215
3. Importanța tehnică a dinamicii . . . . .	215
4. Lucrul mecanic . . . . .	215
5. Puterea mecanică . . . . .	219
6. Randament mecanic . . . . .	220
7. Momente de inerție . . . . .	223
8. Energie cinetică (energie de mișcare) . . . . .	230
9. Energie potențială (energie de poziție) . . . . .	234
10. Energia mecanică . . . . .	236
11. Impuls . . . . .	236
12. Principiile mecanicii . . . . .	238
13. Forțe de inerție . . . . .	243
14. Momentul forțelor de inerție . . . . .	245
15. Aplicații . . . . .	247
Cap. X. <i>Metode generale pentru rezolvarea problemelor de dinamică</i>	
1. Mărimile care intervin în studiul mișcării unui sistem material . . . . .	250
2. Teorema energiei cinetice . . . . .	252
3. Teorema impulsului . . . . .	263
4. Metoda cinetostatică (metoda lui d'Alembert) . . . . .	265



Cap. XI. *Aplicarea metodelor generale și a principiilor mecanicii la studiul mișcărilor particulare ale punctului material și solidului rigid*

- |  |     |
|--|-----|
| 1. Dinamica punctului material . . . . . | 270 |
| 2. Dinamica solidului rigid . . . . .    | 285 |

Cap. XII. *Ciocniri*

- |   |     |
|---|-----|
| 1. Fenomenul ciocnirii și aplicațiile sale în tehnică . . . . .   | 290 |
| 2. Punerea problemei în cazul ciocnirii a două corpuri materiale . . . . .                                  | 290 |
| 3. Ciocnirea centrică a două bile . . . . .   | 290 |
| 4. Pierderea de energie în cazul ciocnirii . . . . .  | 293 |
| 5. Ciocnirea centrică a unei bile cu un perete fix . . . . .  | 293 |
| 6. Ciocnirea unei sfere cu un corp care se poate roti în jurul unei axe fixe; centrul de ciocnire . . . . . | 294 |
| 7. Aplicațiile tehnice ale fenomenului de ciocnire . . . . .  | 295 |

Cap. XIII. *Noțiuni elementare de dinamica mașinilor*

- |   |     |
|---|-----|
| 1. Noțiunea de mașină . . . . .                                       | 297 |
| 2. Forțele care acționează asupra unei mașini . . . . .               | 298 |
| 3. Echilibrarea forțelor de inerție . . . . .                         | 299 |
| 4. Funcționarea unei mașini . . . . .                                 | 300 |
| 5. Reglarea mersului unei mașini; volanți, reglatori, frâne . . . . . | 303 |
| 6. Forța de inerție în tehnică . . . . .                              | 307 |

Cap. XIV. *Dimensiunile și unitățile de măsură ale mărimilor mecanice*

- |   |     |
|---|-----|
| 1. Mărime fizică; măsurare . . . . .  | 310 |
| 2. Mărimi și unități fundamentale și derivate; sisteme de unități . . . . . | 311 |
| 3. Dimensiunea unei mărimi . . . . .  | 312 |
| 4. Omogenitatea . . . . .   | 313 |
| 5. Unități fundamentale ale sistemelor generale . . . . .                   | 313 |
| 6. Aplicații . . . . .  | 316 |

Redactor responsabil: Ing. Munteanu Delia.  
Tehnoredactor: Gaspar Paraschiva

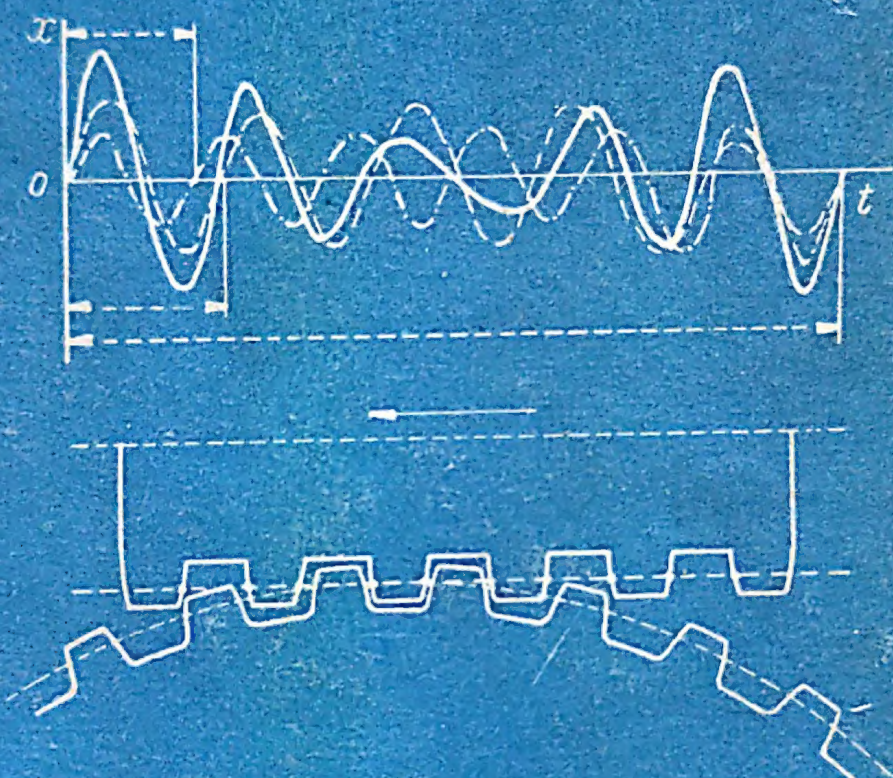
---

*Dat la cules: 28. 09. 62. Bun de tipar: 20. 04. 63.  
Apărut: 1963. Tiraj: 4500+120 Leg 1/2 pînză. Hîrtie:  
scris tip II-a 63 g/m<sup>2</sup>, 16/61×86. Coli editoriale:  
17,348 Coli de tipar: 20,25. A: 02402. C.Z. pentru  
bibliotecile mari: 621. 01(075.36). C.Z. pentru bibliote-  
cile mici: 621.*

---

Întreprinderea Poligrafică Cluj. Str. Brassai nr. 5—7  
10.354/1962





Prețul cărții = 7,30 lei  
 Prețul legăturii = 2,— lei  
 Total = 9,30 lei